La Columna de Matemática Computacional

Sección a cargo de

Tomás Recio

El color dinámico de GeoGebra

por

Rafael Losada Liste

Introducción

GeoGebra es un programa específicamente creado como ayuda al aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas. Inicialmente diseñado para facilitar la observación de las construcciones y propiedades de los objetos de geometría elemental y analítica en los niveles secundarios, hoy es un indiscutido referente mundial como magnífica herramienta para el estudio y exploración de muchos objetos matemáticos de diversa índole, ya sea por parte de alumnos como de profesores e investigadores. En este artículo nos centraremos en cómo podemos aprovechar la combinación de las propiedades *Rastro* y *Color Dinámico* para crear un poderoso artilugio de exploración de las relaciones existentes (y posiblemente ocultas) entre los objetos representados en cualquier tipo de gráfica.

Naturalmente, el formato papel con imágenes en escala de grises no resulta el medio más idóneo para experimentar y analizar los archivos de GeoGebra que han originado las distintas imágenes que se intercalan en este artículo (y que, desde ahora, rogamos al lector imagine a todo color). Aquellos lectores que deseen manipular las construcciones que han originado estas imágenes, pueden descargar esos archivos en la dirección `http://www.geogebra.es/ggb.zip`.

1. La propiedad Rastro

1.1. Huellas de color

Los objetos con representación gráfica creados con GeoGebra (puntos, rectas, polígonos, cónicas, funciones, curvas implícitas, etc.) poseen un color predetermina-

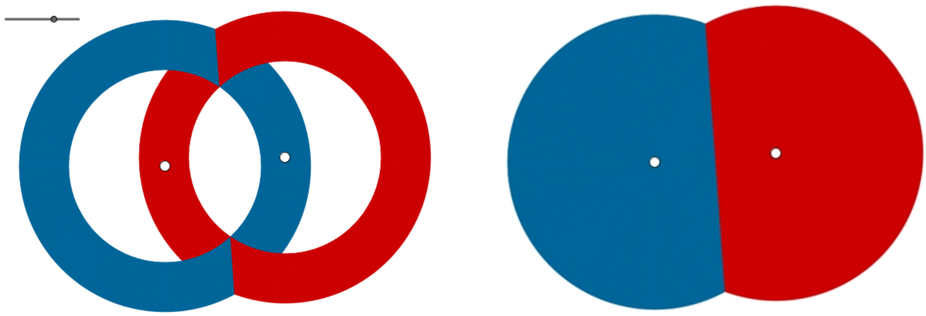

Figura 1: Proceso animado del rastro de color de dos circunferencias de igual radio que se contraen al unísono. Observemos la aparición de la mediatriz del segmento que une sus dos centros.

do, según sea su tipo. Este color puede ser modificado a gusto del usuario, tanto de forma predefinida como a posteriori.

Además, cada objeto puede ser configurado, mediante la activación de su propiedad *Rastro*, para que, al moverse, deje un rastro de su anterior posición. Es decir, al activarse esa propiedad, todos los puntos del objeto marcan con el color que poseen en ese momento cada uno de los píxeles correspondientes a la posición que ocupan en la pantalla. Al moverse el objeto, podemos observar el rastro de color que ha dejado tras sí, marcando todas y cada una de las posiciones alcanzadas por el objeto en su movimiento. Veamos algunos ejemplos de aplicación directa de esta propiedad.

1.2. Mediatrices

Imaginemos que partimos de dos puntos arbitrarios y distintos del plano. Tomando como centro cada uno de ellos, trazamos sendas circunferencias de igual radio y activamos el *Rastro* de ambas circunferencias. Ahora, las contraemos a la vez, a igual velocidad. Cada circunferencia *pisará* el rastro dejado por la otra en los puntos más cercanos a su centro (por ser estos alcanzados, en la contracción, con posterioridad), de tal modo que, finalmente, cada píxel afectado recibirá el color de la circunferencia con centro más próximo a su posición. Como consecuencia, al final del proceso, percibiremos una frontera de color correspondiente a la mediatriz del segmento que une esos puntos (figura 1).

Observemos que, realmente, la mediatriz no existe. Es un patrón de cambio de color el que produce esa percepción visual. Dicho de otra forma, no hemos usado ningún tipo de método constructivo para crear el lugar geométrico correspondiente a la mediatriz. Su visualización se debe tan solo a que los distintos píxeles conservan el color correspondiente a la circunferencia del centro más cercano.

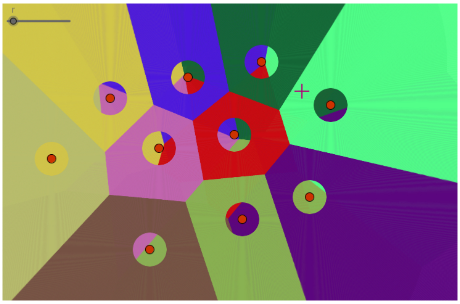

Figura 2: Diagrama de Voronoi, a punto de ser completamente generado mediante rastros de colores.

1.3. Diagramas de Voronoi

Aumentemos el número de puntos y, de igual modo, centremos en cada uno de ellos una circunferencia de radio igual y suficientemente amplio, con el rastro activo y color diferenciado. Al contraer simultáneamente todas las circunferencias hasta alcanzar sus centros obtendremos, finalmente, el diagrama de Voronoi correspondiente. Es decir, aparecerán diferenciadas las regiones formadas por los puntos más próximos a cada punto dado. Esto se debe, de nuevo, a que el color del rastro *superviviente* siempre será el correspondiente a la circunferencia cuyo centro se encuentre más próximo (figura 2).

Si el lector no ha intentado nunca encontrar por sí mismo el diagrama de Voronoi correspondiente a unos cuantos puntos, le invitamos a hacerlo. Seguramente, después de varios ensayos, concederá que no resulta una tarea tan sencilla como podría parecer, especialmente cuando el número de puntos se incrementa considerablemente. Sin embargo, el uso del rastro de color de GeoGebra ha permitido su visualización en segundos, independientemente del número de puntos… ¡y sin necesidad de seguir ningún algoritmo! Recordemos que ni siquiera ha sido necesario conocer cómo se traza una sola de las mediatrices que entran en juego.

1.4. Diagrama de Voronoi con distancia taxicab

También podemos variar la métrica, tomando por ejemplo la distancia *taxi* (distancia Manhattan o Taxicab), en donde los puntos que equidistan del centro ya no están sobre circunferencias sino sobre cuadrados (figura 3). Observemos de paso que el máximo número de lados de cada celda, que en el anterior diagrama era 6, ahora es mayor.

1.5. Diagrama de Voronoi baremado

Basta añadir coeficientes variables que multipliquen a los radios de las circunferencias para obtener otra generalización del diagrama de Voronoi, en donde ahora las fronteras son arcos de circunferencia (figura 4).

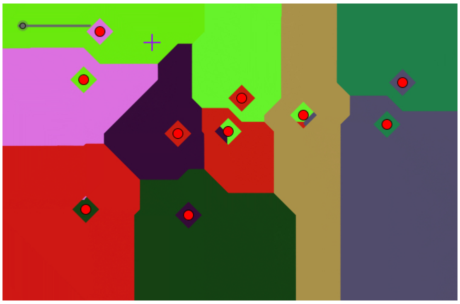

Figura 3: Diagrama de Voronoi con distancia *taxi*, casi completamente generado.

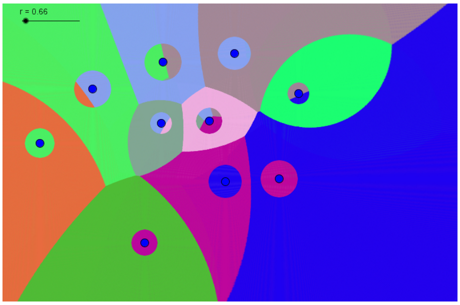

Figura 4: Diagrama de Voronoi baremado, a punto de ser ultimado.

1.6. Diagrama de Voronoi lejano

Como último ejemplo de este tipo, si en vez de contraer las circunferencias las expandimos, obtendremos el diagrama de Voronoi lejano, es decir, las regiones formadas por los puntos que distan más de uno dado que de todos los demás (figura 5). Ahora no todos los puntos iniciales tienen una celda asociada, sino que solo la tendrán aquellos que formen parte del cierre convexo, es decir, sean vértices del polígono convexo de menor área que contiene a todos los puntos.

2. La propiedad Color Dinámico

2.1. El color RGB

Ahora necesitamos estudiar con más detalle cómo asigna GeoGebra un color a un objeto. Por *color* entenderemos un *color-luz*, típico de las pantallas electrónicas, en contraposición con la idea de *color-pigmento*, usual en la pintura tradicional. Uno de los estándares de color-luz más extendidos en las actuales artes gráficas es el que resulta de la síntesis de las intensidades de tres canales independientes, los tres colores primarios de la luz: rojo (Red), verde (Green) y azul (Blue), conocido como

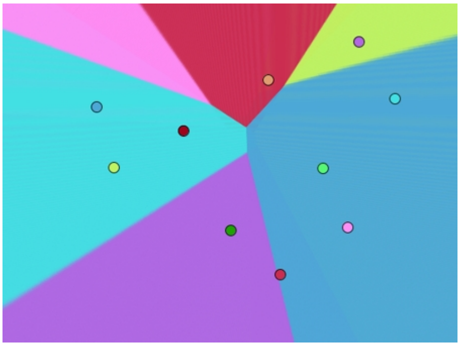

Figura 5: Diagrama de Voronoi lejano.

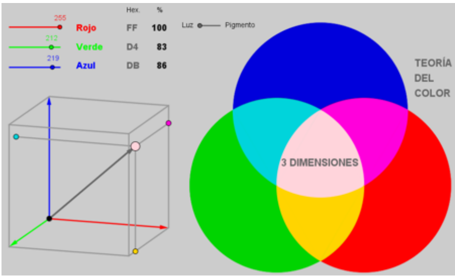

Figura 6: Los tres canales R, G, B de color-luz.

modelo RGB. Aunque GeoGebra también permite otros modelos de color (HSV y HSL), en este artículo solo nos referiremos al modelo RGB (figura 6).

Podemos considerar el color RGB como un vector 3D, cuyas componentes {Rojo, Verde, Azul} varían entre intensidades del 0 % al 100 %. Habitualmente, se reserva 1 byte (8 bits) para cada una de estas intensidades, lo que se traduce en que ese porcentaje viene representado por un número entero entre 0 (byte 00000000) y 255 (byte 11111111).

2.2. Los canales de Color Dinámico en GeoGebra

Por su parte, GeoGebra no asigna un número entero entre 0 y 255 a cada canal de color de un objeto. En su lugar, usa un número decimal en el intervalo [0,1]. Como podemos adivinar, basta dividir entre 255 cada valor de la anterior asignación para obtener esta otra. Los motivos para esta variación del estándar informático hay que buscarlos en el cambio de base. En informática se usa preferentemente la base 2, y sus potencias. En matemáticas, nuestra base 10 es la más frecuente. Como consecuencia, los intervalos [0,100], [0,10] y [0,1] ganan puntos frente al [0,255]. Más aún, debido tanto al recorrido positivo de algunas funciones elementales (seno, coseno, random, probabilidad. . .) como a su simplicidad, no es extraño que se haya optado por el intervalo [0,1].

La propiedad *Color Dinámico* de los puntos de GeoGebra (accesible a través de las *Propiedades Avanzadas* de cada punto) consta pues de tres valores numéricos, cada uno de ellos variable entre 0 y 1, que corresponden a la intensidad de cada color-luz primario presente en su color combinado. Es decir, forman un conjunto {Rojo, Verde, Azul} de valores correspondientes al *tanto por 1* de color en cada canal RGB. Por ejemplo, {1,0,0} corresponde al color rojo puro (color-luz resultado de combinar 100 % rojo, 0 % verde y 0 % azul). En la siguiente tabla se puede apreciar (agrupados por complementarios) el color resultado de la elección de algunos valores en estos canales RGB:

R	G	B	Síntesis	R	G	B	Síntesis
1	1	1	Blanco	0	0	0	Negro
0.67	0.67	0.67	Gris claro	0.33	0.33	0.33	Gris oscuro
1	0	0	Rojo	0	1	1	Cian
0	1	0	Verde	1	0	1	Magenta
0	0	1	Azul	1	1	0	Amarillo

2.3. Color Dinámico de un punto

En cada uno de los canales RGB asociados a un *objeto* cualquiera creado con GeoGebra, no solo podemos introducir un valor numérico estático, sino también cualquier expresión numérica variable. Consideremos ahora el caso en que esta posible variabilidad se realiza en función de las coordenadas de un *punto* P, por ser el de mayor interés para nuestros propósitos. Denominaremos a esta expresión $e(P)$, ya sea constante o variable.

Veamos un ejemplo. Podemos cambiar dinámicamente el color de las caras de un poliedro regular, asignándoles colores dinámicos que dependan de la posición del foco P de luz. Para ello, basta calcular el ángulo entre el vector normal a cada cara del poliedro (con sentido alejándose del centro del poliedro) y el vector que une el centro del poliedro con el foco de luz. Solo falta asignar a cada canal de color una expresión cuyo valor, entre 0 y 1, sea tanto más grande cuanto más pequeño sea ese ángulo (figura 7).

A medida que intentamos aplicar el método a otros ejemplos como este, encontramos un posible problema. Si colocamos directamente $e(P)$ en cada canal de color, en muchos casos no obtendremos un valor válido entre 0 y 1. En esos casos, GeoGebra reduce interna y automáticamente tal valor usando la función de variable real

$$c(e(P)) = 1 - \operatorname{abs}(1 - e(P) + 2\operatorname{floor}(e(P)/2)),$$

lo que equivale a seguir la siguiente norma:

1. Si $e(P)$ no está entre 0 y 2, toma su resto módulo 2.
2. Si $e(P)$ (o su resto módulo 2) está entre 1 y 2, toma $2 - e(P)$.

El motivo de esta regla es evitar discontinuidades de color. Viendo la gráfica (figura 8) de la función $y = c(x)$, podemos observar que tal comportamiento periódico de los

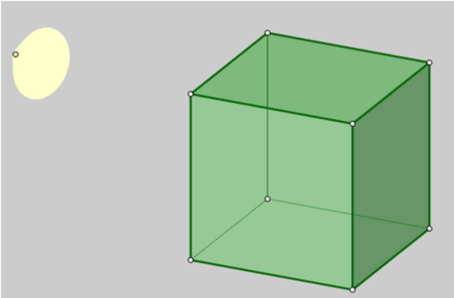

Figura 7: Caras con color dinámico.

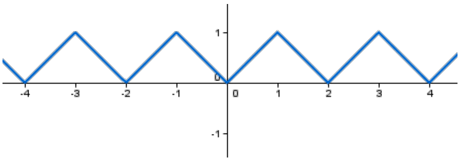

Figura 8: La función periódica $y = c(x)$ asigna a cada número real un valor entre 0 y 1.

valores ingresados en los campos RGB del Color Dinámico provocan que cualquier valor de $e(P)$ coincida con $e(P)+2m$, para cualquier número entero m. En particular, cada vez que $e(P)$ es par, $c(P)$ se reduce al valor 0. En el siguiente apartado veremos las dificultades que esto puede acarrear y cómo solventarlas.

3. Combinación de las propiedades Rastro y Color Dinámico

3.1. Periodicidad del Color Dinámico

Como ya se ha señalado, cada canal RGB del color dinámico de GeoGebra tiene un comportamiento periódico. Si construimos un punto P y un segmento perpendicular al eje OX que contenga a P y le asignamos a ese segmento el color dinámico $\text{RGB} = \{0, x(P), 0\}$, entonces, al activar el rastro de la recta y moverla, obtendremos una distribución de color que sigue el patrón que muestra la figura 9.

Ahora bien, supongamos que tenemos dos puntos fijos A y B. Al asignar el valor 0 al canal Rojo y Azul, e introducir, como condición para el canal Verde,

$$e(P) = \text{Distancia}[P, A] - \text{Distancia}[P, B],$$

el valor de $c(e(P))$ será 0 no solo cuando la distancia de P al punto A sea la misma que al punto B, sino también cada vez que la diferencia entre ambas sea un número par, apareciendo en negro una familia de hipérbolas en vez de únicamente la mediatriz del segmento AB (figura 10).

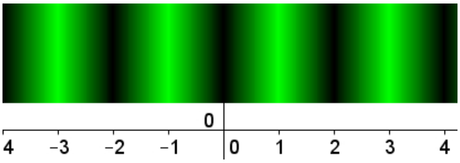

Figura 9: Patrón periódico generado por un segmento vertical con el valor del canal de color Verde en función de la abscisa. Las zonas más oscuras corresponden a bajas intensidades del color verde.

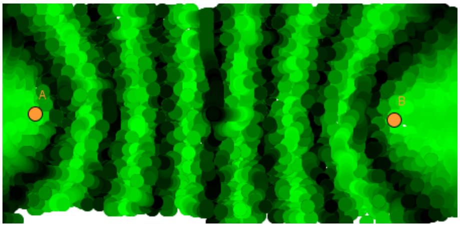

Figura 10: Rastro dejado por el punto P al moverlo en la región circundante a los puntos A y B.

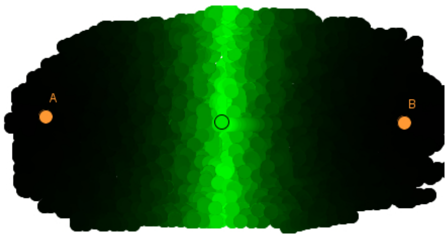

Figura 11: Rastro dejado por el punto P usando la condición de color como exponente.

Para evitar este inconveniente, no colocamos directamente la condición $e(P)$ como valor del canal Verde, sino que en su lugar ingresamos la expresión

$$2\hat{\ }(-\operatorname{abs}(e(P))).$$

De esta forma, solo cuando $e(P)$ sea 0 el valor resultante RGB será $\{0{,}1{,}0\}$ (color verde), estando tanto más cerca del verde puro (figura 11) cuanto menor sea en valor absoluto $e(P)$. Naturalmente, la base 2 puede ser sustituida por cualquier otra como e, 3, 10...

La gráfica de la función $y = 2^{-|x|}$ es la que aparece en la figura 12, por lo que al realizar la sustitución obtenemos, en lugar de la figura 9, la distribución de color que aparece en la figura 13.

De modo análogo, si introducimos la misma expresión en los tres canales, Rojo, Verde y Azul, obtenemos que el color del rastro será blanco puro (es decir, $\{1{,}1{,}1\}$) solo cuando $e(P) = 0$.

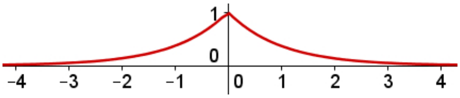

Figura 12: Gráfica de la función $y = 2^{-|x|}$.

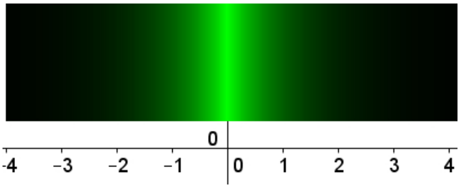

Figura 13: La función exponencial rompe la periodicidad del canal de color.

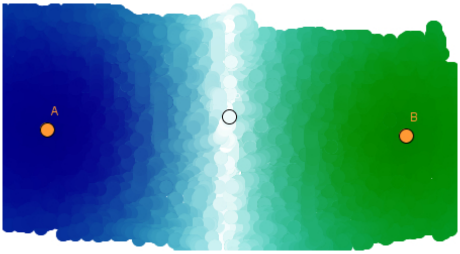

Figura 14: El punto A aparece rodeado de rastros azules; el punto B, de rastros verdes.

Si deseamos más policromía, basta asignar diferentes expresiones algebraicas a cada canal de color. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
&\text{Rojo}: \quad 2\hat{}\,(-\operatorname{abs}(\text{Distancia}[P,B]-\text{Distancia}[P,A])),\\
&\text{Verde}: \quad 2\hat{}\,(-\operatorname{abs}(1-\text{Distancia}[P,B]/\,\text{Distancia}[P,A])),\\
&\text{Azul}: \quad 2\hat{}\,(-\operatorname{abs}(1-\text{Distancia}[P,A]/\,\text{Distancia}[P,B])).
\end{aligned}$$

Observemos que cuando las distancias de P a A y de P a B sean iguales, el valor numérico RGB continuará siendo $\{1,1,1\}$, es decir, blanco (figura 14). El uso de más de un color, además de mejorar la estética, es especialmente útil cuando queremos diferenciar otras características de la expresión o expresiones usadas, como sus signos, o bien cuando deseamos establecer simultáneamente hasta tres condiciones esencialmente diferentes, una para cada canal de color.

Es importante señalar que la expresión que condiciona el color no debe ser una función discreta, sino continua. Es decir, no debemos intentar visualizar únicamente los puntos en donde se verifica con total exactitud[1] que $e(P) = 0$, sino un gradiente de intensidades correspondiente a la cercanía a esa exactitud. Esta característica

[1]Como se conseguiría, por ejemplo, con el uso del comando condicional de GeoGebra en cada canal de color: Si[e(P)==0,1,0].

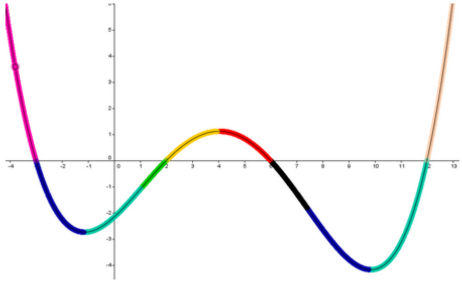

Figura 15: Rastro de color en la gráfica de una función, según sea su signo y los de sus funciones derivadas (primera y segunda).

es *fundamental* para servirnos de esta herramienta como ayuda en la exploración de relaciones entre los distintos objetos implicados. Además, podemos modificar la función $y = 2^{-|x|}$ con un parámetro k que nos permita modificar la densidad del gradiente de color, simplemente añadiéndolo como factor del exponente:

$$2\hat{}(-k\,\mathrm{abs}(e(P))).$$

Resumiendo, el rastro de color dinámico ayuda a visualizar cualquier lugar basándose en el principio de que puntos suficientemente cercanos a cumplir la condición aparecerán suficientemente resaltados, lo que indica la probable cercanía del lugar buscado.

3.2. Algunas aplicaciones sencillas

3.2.1. Diferenciación de signos

La primera utilidad del color es la diferenciación de regiones atendiendo a una o más propiedades o relaciones. Como ejemplo, la figura 15 muestra la gráfica de una función descompuesta en distintos intervalos. (Resulta tentador proponer a los alumnos de bachillerato que descubran qué propiedad distingue unos trozos de otros.)

3.2.2. Caleidoscopio

La figura 16 muestra otra aplicación inmediata, esta vez en forma de caleidoscopio interactivo. La imagen es el resultado del movimiento manual de un solo punto, el único que la construcción permite mover directamente con el ratón, es decir, el único punto *libre*. Pero, en cada instante, tanto él como todas sus sucesivas reflexiones en la trama de rectas dejan una huella con el mismo color.

3.2.3. Familia de curvas

El rastro de color también nos permite contrastar fácilmente similitudes y diferencias en gráficas que obedecen a un mismo modelo general, como las familias