Extremwertprobleme und Funktionsgraphen (Reckteckumfang)

H. Wuschke

Aufgabe A1.5 Abitur 2011

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{2x+1}{x} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

Der Graph von f ist K.

Auf K existiert ein Punkt $Q\,(r|f(r))$ mit $r \in \mathbb{R}, r > 0$.
Durch Q werden Parallelen zu den Koordinatenachsen gelegt.
Diese Parallelen und die Koordinatenachsen bilden ein Rechteck.
Bestimmen Sie die Koordinaten von Q so, dass der Umfang dieses Rechtecks minimal wird.

Berechnen Sie den minimalen Umfang.

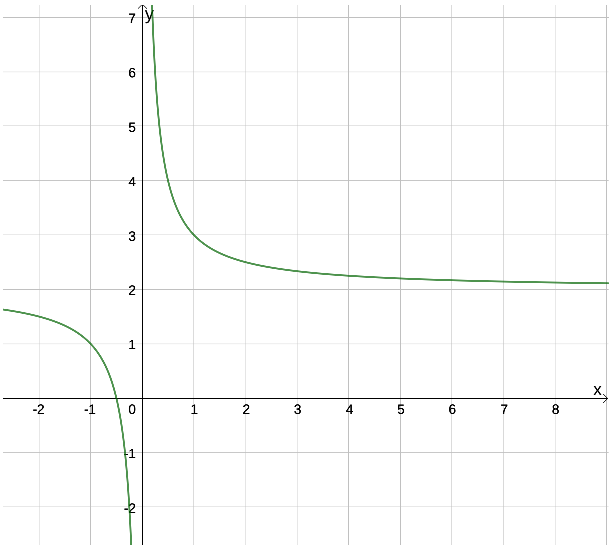

Abbildung 1: Funktionsgraph von $f(x)$

Für den Umfang des Rechtecks gilt: $U(r) = 2 \cdot r + 2 \cdot f(r) = 2 \cdot \left(r + \frac{2r+1}{r}\right)$

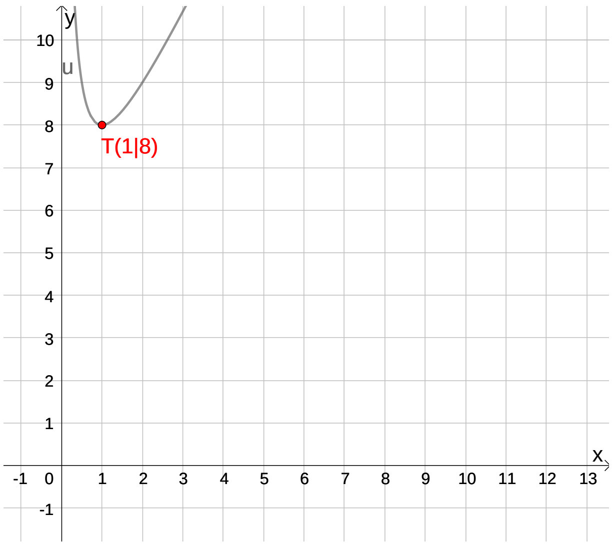

Abbildung 2: Umfangsfunktion mit Tiefpunkt

Der Tiefpunkt von $U(r)$ liegt bei $T(1|8)$, d.h. die Funktion hat einen minimalen Umfang von 8 LE bei $r = 1$.

Der Punkt Q liegt bei $Q(1|f(1))$ bzw. $Q(1|3)$