Operaciones y cálculos con derivadas.

Derivada de la función constante. Derivada del producto de un número por una función

Si $f(x)=k$ (*constante*), se cumplirá $f'(x)=0$, ya que

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{k-k}{h}=0$$

Si $f(x)=x$, se cumplirá $f'(x)=1$, ya que

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1$$

Si $f(x)=k\,.\,x$ (*k constante*), se cumplirá $f'(x)=k$ ya que

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{k.(x+h)-k.x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{k.h}{h}=k$$

Si $f(x)=k\,.\,g(x)$ (*k constante y g derivable*), se cumplirá $f'(x)=k\,.\,g'(x)$ ya que

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{k.g(x+h)-k.g(x)}{h}=k\,.\,\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=k\,.\,g'(x)$$

 # Ejemplo.- $(7x^3)'=7\,.(x^3)'=21\,.\,x^2$

Operaciones aritméticas con derivadas.

Algunas reglas aritméticas de derivación son

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables, se cumple

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$$

Ya que, se cumple

$$(f(x)\pm g(x))'=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)\pm g(x+h)-(f(x)\pm g(x))}{h}=$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\pm\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)\pm g'(x)$$

 # Ejemplo.- $(3x^2+2x-5)'=(3x^2)'+(2x)'-(5)'=6x+2$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables, se cumple

$$(f(x).\,g(x))'=f'(x).\,g(x)+f(x).\,g'(x)$$

Ya que si tomamos logaritmos neperianos, se cumple

$$\ln(f(x).\,g(x))=\ln(f(x))+\ln(g(x))$$

Y derivando esta igualdad, se cumple

$$\frac{(f(x).\,g(x))'}{(f(x).\,g(x))}=\frac{f(x)'}{f(x)}+\frac{g(x)'}{g(x)}$$

Que operando

$$\frac{(f(x).\,g(x))'}{(f(x).\,g(x))}=\frac{f(x)'.\,g(x)+f(x).\,g(x)'}{(f(x).\,g(x))}\Rightarrow(f(x).\,g(x))'=f'(x).\,g(x)+f(x).\,g'(x)$$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables y $g(x)\neq 0$, se cumple

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x).\,g(x)-f(x).\,g'(x)}{g(x)^2}$$

Ya que si tomamos logaritmos neperianos, se cumple

$$\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\ln(f(x))-\ln(g(x))$$

Y derivando esta igualdad, se cumple

$$\frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'}{\frac{f(x)}{g(x)}}=\frac{f(x)'}{f(x)}-\frac{g(x)'}{g(x)}$$

Que operando

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f(x)}{g(x)}.\frac{f(x)'.\,g(x)-f(x).\,g(x)'}{(f(x).\,g(x))}\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x).\,g(x)-f(x).\,g'(x)}{g(x)^2}$$

 # Ejemplo.- $\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{2.x\,.(x^2+1)-x^2.2.\,x}{(x^2+1)^2}=\frac{2.x}{(x^2+1)^2}$

<u>Derivadas de funciones compuestas (regla de la cadena).</u>

- **Si** $f(g(x))$ **es una función compuesta, donde** $Ima(g(x))\subset Dom(f(x))$ **, entonces**

$$(f(g(x)))'=f'(g(x)).\,g'(x)$$

Ya que

$$(f(g(x)))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}.\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}.\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(g(x)).\,g'(x)$$

 # Ejemplo.- $(sen(\ln x))'=sen'(\ln x),(\ln x)'=\cos(\ln x).\frac{1}{x}$

Derivadas de función inversa.

- Si $f(x)$ tiene función inversa $f^{-1}(x)$, entonces

$$(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(y)} \quad \text{con} \quad f^{-1}(x)=y$$

Teniendo en cuenta que se cumple

$$f(f^{-1}(x))=x$$

Utilizando la derivada de la función compuesta, se cumplirá

$$\left(f'(f^{-1}(x))\right)'=(x)' \quad \Rightarrow \quad \left(f'(f^{-1}(x))\right).\left(f^{-1}(x)\right)'=1$$

Luego:

$$\left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\left(f'(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{\left(f'(y)\right)}$$

Derivadas de algunas funciones.

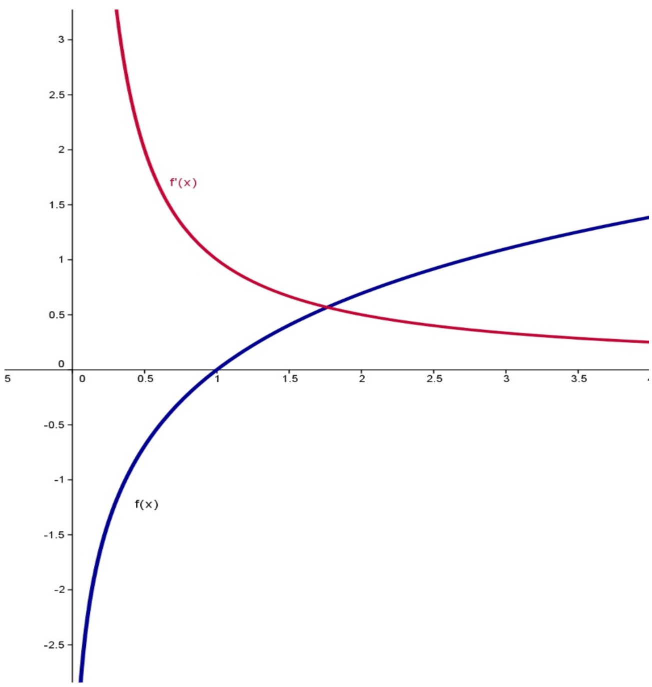
Función logaritmo

- La **derivada** de la función $f(x)=\ln x$ en $(0,+\infty)$ es $f'(x)=\frac{1}{x}$, ya que

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{h}{x}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{h}{x}}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln e=\frac{1}{x}$$

y cuyas gráficas son



- Teniendo en cuenta que $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, se cumplirá

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} . \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln e}{\ln a} . \left(\frac{1}{x}\right) = \log_a e . \left(\frac{1}{x}\right)$$

Función exponencial

- La **derivada** de la función $f(x)=e^x$ en $\mathbb{R}$ es $f'(x)=e^x$, ya que

$$\left.\begin{array}{l}(\ln e^x)' = \dfrac{e^x}{(e^x)'} \\ (\ln e^x)' = (x . \ln e)' = x' = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \quad (e^x)' = e^x$$

- Teniendo en cuenta que $a^x = e^{x . \ln a}$, se cumplirá

$$(a^x)' = (e^{x . \ln a})' = (e^{x . \ln a})' . (x . \ln a)' = (\ln a) . a^x$$

Función potencial

- La **derivada** de la función $f(x)=x^a$ en $\mathbb{R}$ es $f'(x)=a . x^{a-1}$, ya que

$$(x^a)' = (e^{a . \ln x})' = (e^{a . \ln x})' . (a . \ln x)' = x^a . \frac{a}{x} = a . x^{a-1}$$

Función seno

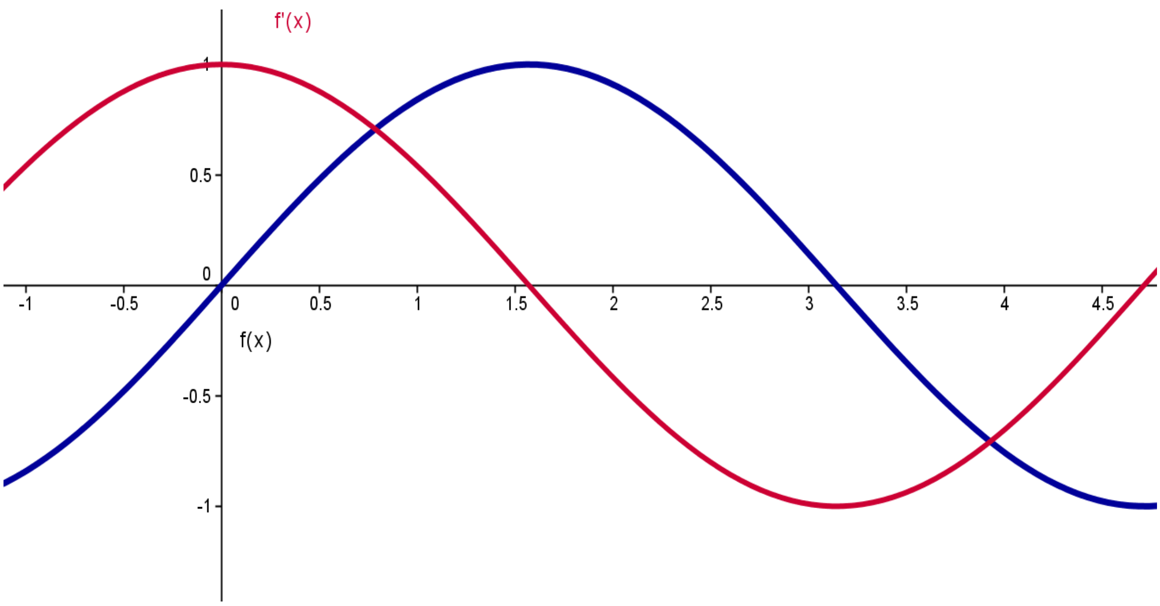
- La **derivada** de la función $f(x)= sen\, x$ en $\mathbb{R}$ es $f'(x)=\cos x$, ya que

$$(sen\, x)' = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{senx . \cos h + \cos x . sen\, h - sen\, x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{senx .(\cos h - 1) + \cos x . sen\, h}{h} = \lim_{h\to 0} \left[sen\, x . \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x . \frac{sen\, h}{h} \right] =$$

$$= \cos x$$

Y cuyas gráficas son



Función coseno

- La **derivada** de la función $f(x)=\cos x$ en $\mathbb{R}$ es $f'(x)=-sen\,x$, ya que

$$(\cos x)'=\left(sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-sen\,x$$

Función tangente

- La **derivada** de la función $f(x)=tg\,x$ en $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ es , $f'(x)=1+tg^2 x$ ya que

$$\left(\frac{sen\,x}{\cos x}\right)'=\left(\frac{\cos x\,.\,\cos x+sen\,x\;sen\,x}{\cos^2 x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x}=sec^2 x=1+tg^2 x$$