

# Superfícies de Bézier

## Superfícies de Bézier rectangular

És una superfície parametritzada, amb paràmetres  $u$  i  $v$ , construïda a partir de:

- 1 El **bigrau**,  $(n_1, n_2)$  graus de les vores
- 2 La **mallada** de  $(n_1 + 1) \times (n_2 + 1)$  **punts de control**:  $\{P_{ij}\}_{0 \leq i \leq n_1, 0 \leq j \leq n_2}$

Si  $B_i^{n_1}(u)$  i  $B_j^{n_2}(v)$  són els polinomis de Bernstein de graus  $n_1$  i  $n_2$ , la superfície s'expressa com:

$$\sigma(u, v) := \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} P_{ij} \cdot B_i^{n_1}(u) \cdot B_j^{n_2}(v), \quad u, v \in [0, 1]$$

$$\sigma(u, v) = (B_0^{n_1}(u) \cdots B_{n_1}^{n_1}(u)) \underbrace{\begin{pmatrix} P_{00} & \cdots & P_{0n_2} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n_1 0} & \cdots & P_{n_1 n_2} \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} B_0^{n_2}(v) \\ \vdots \\ B_{n_2}^{n_2}(v) \end{pmatrix}$$

# Superfícies de Bézier

## Corbes de Bézier d'una superfície de Bézier

Les superfícies de Bézier es poden escriure:

$$\sigma(u, v) := \sum_{i=0}^{n_1} \left( \sum_{j=0}^{n_2} \cdot B_j^{n_2}(v) P_{ij} \right) \cdot B_i^{n_1}(u), \quad u, v \in [0, 1]$$

$$\sigma(u, v) := \sum_{j=0}^{n_2} \left( \sum_{i=0}^{n_1} \cdot B_i^{n_1}(u) P_{ij} \right) \cdot B_j^{n_2}(v), \quad u, v \in [0, 1]$$

Si fixem  $v = v_0$ , o bé  $u = u_0$ ,

$$\gamma(v) = \sigma(u, v_0) := \sum_{i=0}^{n_1} \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{n_2} \cdot B_j^{n_2}(v_0) P_{ij} \right)}_{\text{punts de control}} \cdot B_i^{n_1}(u), \quad v \in [0, 1]$$

$$\gamma(u) = \sigma(u_0, v) := \sum_{j=0}^{n_2} \underbrace{\left( \sum_{i=0}^{n_1} \cdot B_i^{n_1}(u_0) P_{ij} \right)}_{\text{punts de control}} \cdot B_j^{n_2}(v), \quad u \in [0, 1]$$

s'obtenen corbes de Bézier de grau  $n_1$  i  $n_2$ , respectivament.

# Superfícies de Bézier

## Corbes de Bézier d'una superfície de Bézier

Les superfícies de Bézier es poden escriure:

$$\sigma(u, v) := \sum_{i=0}^{n_1} \left( \sum_{j=0}^{n_2} \cdot B_j^{n_2}(v) P_{ij} \right) \cdot B_i^{n_1}(u), \quad u, v \in [0, 1]$$

$$\sigma(u, v) := \sum_{j=0}^{n_2} \left( \sum_{i=0}^{n_1} \cdot B_i^{n_1}(u) P_{ij} \right) \cdot B_j^{n_2}(v), \quad u, v \in [0, 1]$$

Si fixem  $v = v_0$ , o bé  $u = u_0$ ,

$$\gamma(v) = \sigma(u, v_0) := \sum_{i=0}^{n_1} \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{n_2} \cdot B_j^{n_2}(v_0) P_{ij} \right)}_{\text{punts de control}} \cdot B_i^{n_1}(u), \quad v \in [0, 1]$$

$$\gamma(u) = \sigma(u_0, v) := \sum_{j=0}^{n_2} \underbrace{\left( \sum_{i=0}^{n_1} \cdot B_i^{n_1}(u_0) P_{ij} \right)}_{\text{punts de control}} \cdot B_j^{n_2}(v), \quad u \in [0, 1]$$

s'obtenen **corbes de Bézier** de grau  $n_1$  i  $n_2$ , respectivament.

# Superfícies de Bézier

Exemple:  $\sigma(u, v)$  superfície de Bézier bigrau  $(n_1, n_2) = (2, 3)$ , amb malla de control:  $\{(0, 0, -1), (1, 0, 4), (2, 0, 3), (3, 0, -3), (0, 2, 2), (1, 2, 5), (2, 2, 6), (3, 2, 3), (0, 4, -2), (1, 4, 4), (2, 4, 3), (2, 4, -3)\}$ .

$\sigma(u, v) =$

$$\begin{pmatrix} (1-u)^2 & 2u(1-u) & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0, 0, -1) & (1, 0, 4) & (2, 0, 3) & (3, 0, -3) \\ (0, 2, 2) & (1, 2, 5) & (2, 2, 6) & (3, 2, 3) \\ (0, 4, -2) & (1, 4, 4) & (2, 4, 3) & (2, 4, -3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-v)^3 \\ 3v(1-v)^2 \\ 3v^2(1-v) \\ v^3 \end{pmatrix} = \dots$$

$$\dots = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$x(u, v) = 3v - u^2v^3$$

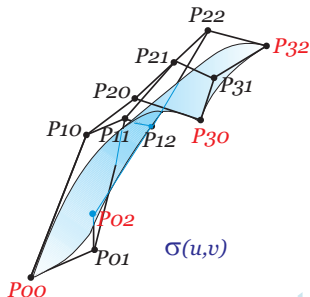
$$y(u, v) = 4u$$

$$z(u, v) = 7u^2v^3 - 6uv^3 + v^3 - 27u^2v^2 + 24uv^2 - 18v^2 + 15u^2v - 12uv + 15v - 7u^2 + 6u - 1$$

# Superfícies de Bézier

## Propietats de les superfícies de Bézier:

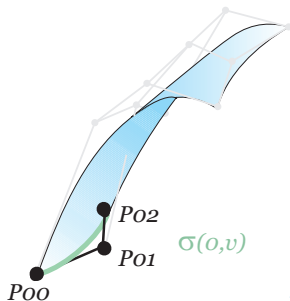
- **Invariància afí:** Per transformar amb una afinitat una superfície de Bézier, n'hi ha prou en aplicar-la a la malla de punts de control.
- **Pas pels extrems:** La superfície té quatre vores, que són les corbes de Bézier de la superfície que corresponen a fixar els valors  $u = 0$ ,  $u = 1$ ,  $v = 0$  i  $v = 1$ , respectivament, dels paràmetres. Els punts on es tallen dues d'aquestes corbes són els **vèrtexs** de la superfície: els punts  $P_{00}$ ,  $P_{0n_2}$ ,  $P_{n_1 0}$  i  $P_{n_1 n_2}$  de la malla de control.



# Superfícies de Bézier

## Propietats de les superfícies de Bézier:

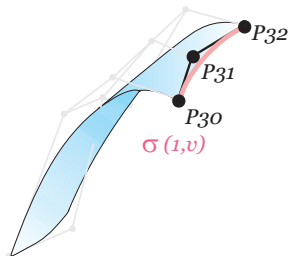
- **Invariància afí:** Per transformar amb una afinitat una superfície de Bézier, n'hi ha prou en aplicar-la a la malla de punts de control.
- **Pas pels extrems:** La superfície té **quatre vores**, que són les corbes de Bézier de la superfície que corresponen a fixar els valors  $u = 0$ ,  $u = 1$ ,  $v = 0$  i  $v = 1$ , respectivament, dels paràmetres. Els punts on es tallen dues d'aquestes corbes són els vèrtexs de la superfície: els punts  $P_{00}$ ,  $P_{0n_2}$ ,  $P_{n_1 0}$  i  $P_{n_1 n_2}$  de la malla de control.



# Superfícies de Bézier

## Propietats de les superfícies de Bézier:

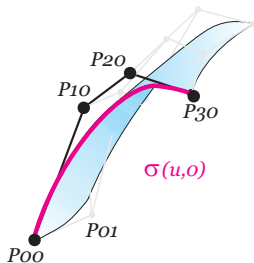
- **Invariància afí:** Per transformar amb una afinitat una superfície de Bézier, n'hi ha prou en aplicar-la a la malla de punts de control.
- **Pas pels extrems:** La superfície té **quatre vores**, que són les corbes de Bézier de la superfície que corresponen a fixar els valors  $u = 0$ ,  $u = 1$ ,  $v = 0$  i  $v = 1$ , respectivament, dels paràmetres. Els punts on es tallen dues d'aquestes corbes són els vèrtexs de la superfície: els punts  $P_{00}$ ,  $P_{0n_2}$ ,  $P_{n_1 0}$  i  $P_{n_1 n_2}$  de la malla de control.



# Superfícies de Bézier

## Propietats de les superfícies de Bézier:

- **Invariància afí:** Per transformar amb una afinitat una superfície de Bézier, n'hi ha prou en aplicar-la a la malla de punts de control.
- **Pas pels extrems:** La superfície té **quatre vores**, que són les corbes de Bézier de la superfície que corresponen a fixar els valors  $u = 0$ ,  $u = 1$ ,  $v = 0$  i  $v = 1$ , respectivament, dels paràmetres. Els punts on es tallen dues d'aquestes corbes són els vèrtexs de la superfície: els punts  $P_{00}$ ,  $P_{0n_2}$ ,  $P_{n_1 0}$  i  $P_{n_1 n_2}$  de la malla de control.

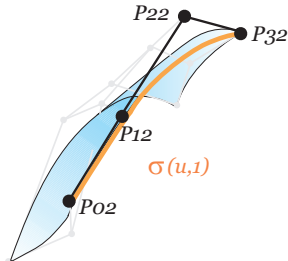




# Superfícies de Bézier

## Propietats de les superfícies de Bézier:

- **Invariància afí:** Per transformar amb una afinitat una superfície de Bézier, n'hi ha prou en aplicar-la a la malla de punts de control.
- **Pas pels extrems:** La superfície té **quatre vores**, que són les corbes de Bézier de la superfície que corresponen a fixar els valors  $u = 0$ ,  $u = 1$ ,  $v = 0$  i  $v = 1$ , respectivament, dels paràmetres. Els punts on es tallen dues d'aquestes corbes són els vèrtexs de la superfície: els punts  $P_{00}$ ,  $P_{0n_2}$ ,  $P_{n_1 0}$  i  $P_{n_1 n_2}$  de la malla de control.

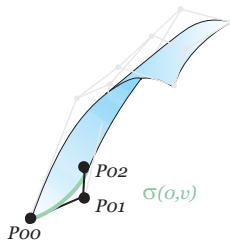


# Superfícies de Bézier

- Polígons de control de les vores:

Corba de Bézier:  $\sigma(0, v)$  polígon de control: 1<sup>a</sup> fila de la matriu  $P$

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} \end{pmatrix}$$

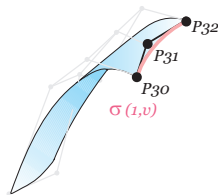


# Superfícies de Bézier

- Polígons de control de les vores:

Corba de Bézier:  $\sigma(1, v)$  polígon de control: darrera fila de  $P$ ;

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} \end{pmatrix}$$

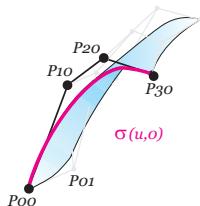


# Superfícies de Bézier

- Polígons de control de les vores:

Corba de Bézier:  $\sigma(u, 0)$  polígon de control: 1<sup>a</sup> columna de la matriu  $P$

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} \end{pmatrix}$$

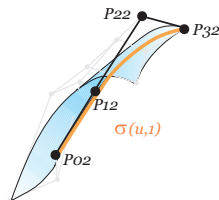


# Superfícies de Bézier

- Polígons de control de les vores:

Corba de Bézier:  $\sigma(u, 1)$  polígon de control darrera columna de  $P$

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} \end{pmatrix}$$



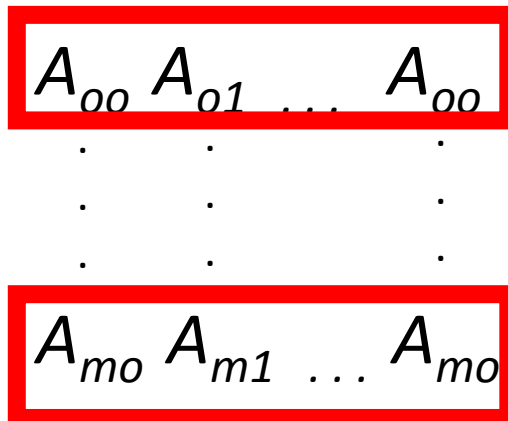
# Superfícies de Bézier

## Algoritme de Casteljau

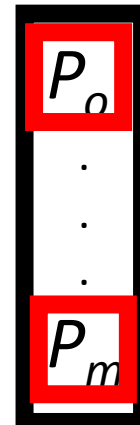
És un procediment recursiu per a calcular punts d'una superfície de Bézier bigrau  $(n_1, n_2)$  a partir de la seva malla de control.

Metodologia Algoritme de Casteljau de dos passos:

Malla de control



**Pas1.** Aplicar Casteljau a cada fila de la malla de control amb  $t=t_0$

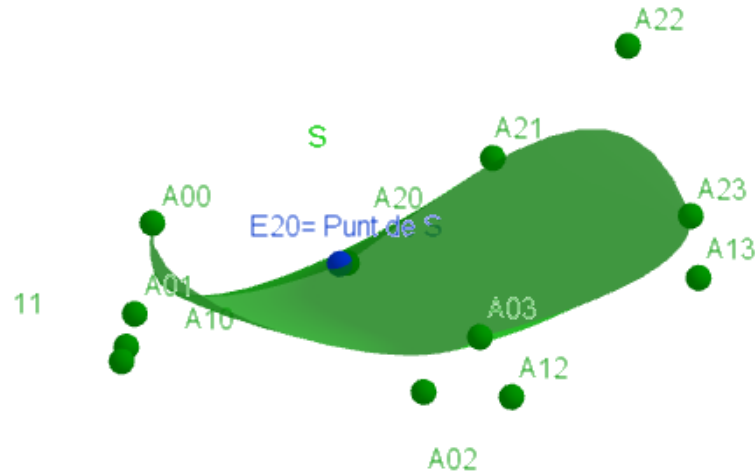


**Pas2.** Aplicar Casteljau als punts del pas 1 amb  $s=s_0$

$P = S(t_0, s_0)$

# Superfícies de Bézier

Algoritme de Casteljaou de dos passos



	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4						
5	A00	A00	$(1 - t_0) C_5 + t_0 C_6$	$(1 - t_0) D_5 + t_0 D_6$	$(1 - t_0) * E_5 + t_0 * E_6$	
6	A01	A01	$(1 - t_0) C_6 + t_0 C_7$	$(1 - t_0) D_6 + t_0 D_7$		
7	A02	A02	$(1 - t_0) C_7 + t_0 C_8$			
8	A03	A03				
9						
10	...	A10	$(1 - t_0) C_{10} + t_0 C_{11}$	$(1 - t_0) D_{10} + t_0 D_{11}$	$(1 - t_0) * E_{10} + t_0 * E_{11}$	
11	...	A11	$(1 - t_0) C_{11} + t_0 C_{12}$	$(1 - t_0) D_{11} + t_0 D_{12}$		
12	...	A12	$(1 - t_0) C_{12} + t_0 C_{13}$			
13	...	A13				
14						
15	A20	A20	$(1 - t_0) C_{15} + t_0 C_{16}$	$(1 - t_0) D_{15} + t_0 D_{16}$	$(1 - t_0) * E_{15} + t_0 * E_{16}$	
16	A21	A21	$(1 - t_0) C_{16} + t_0 C_{17}$	$(1 - t_0) D_{16} + t_0 D_{17}$		
17	A22	A22	$(1 - t_0) C_{17} + t_0 C_{18}$			
18	A23	A23				
19						
20	...	F5	$(1 - s_0) C_{20} + s_0 C_{21}$	$(1 - s_0) D_{20} + s_0 D_{21}$		
21	...	F10	$(1 - s_0) C_{21} + s_0 C_{22}$			
22	F15	F15				
23						

Primer pas

Segon pas

Casteljau amb punts de les files de la malla control de la superfície

A00	A01	A02
A10	A11	A12
A20	A21	A22

# Aplicació algoritme de Casteljau

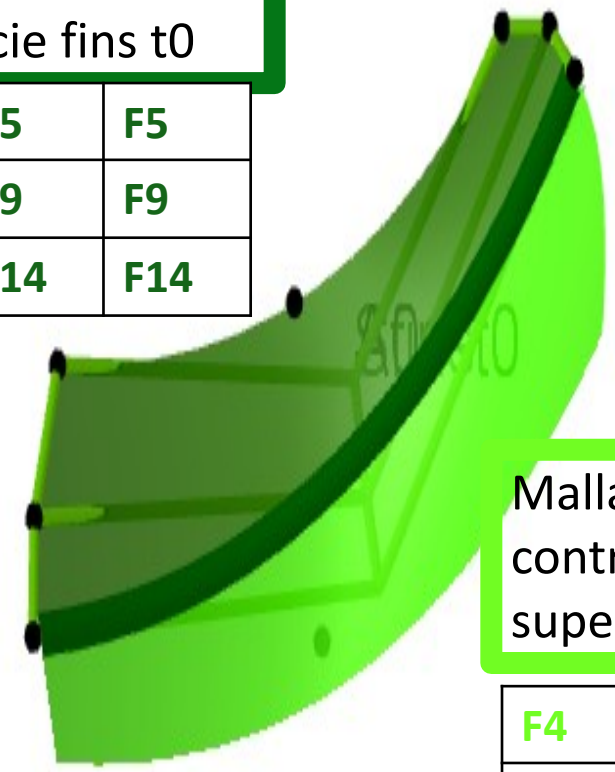
## Subdivisió Superfície Bézier biquadràtica

Full de càlcul

	D	E	F
4	A00	$(1 - t_0) D_4 + t_0 D_5$	$(1 - t_0) * E_4 + t_0 * E_5$
5	A01	$(1 - t_0) D_5 + t_0 D_6$	
6	A02		
7			
8			
9	A10	$(1 - t_0) D_9 + t_0 D_{10}$	$(1 - t_0) * E_9 + t_0 * E_{10}$
10	A11	$(1 - t_0) D_{10} + t_0 D_{11}$	
11	A12		
12			
13			
14	A20	$(1 - t_0) D_{14} + t_0 D_{15}$	$(1 - t_0) * E_{14} + t_0 * E_{15}$
15	A21	$(1 - t_0) D_{15} + t_0 D_{16}$	
16	A22		

Malla de punts de control del tram de superfície fins  $t_0$

D4	E5	F5
D9	E9	F9
D14	E14	F14



Malla de punts de control del tram de superfície des de  $t_0$

F4	E5	D6
F9	E10	D11
F14	E15	D16



Casteljau amb punts de les columnes de la malla control de la superfície

A00	A01	A02
A10	A11	A12
A20	A21	A22

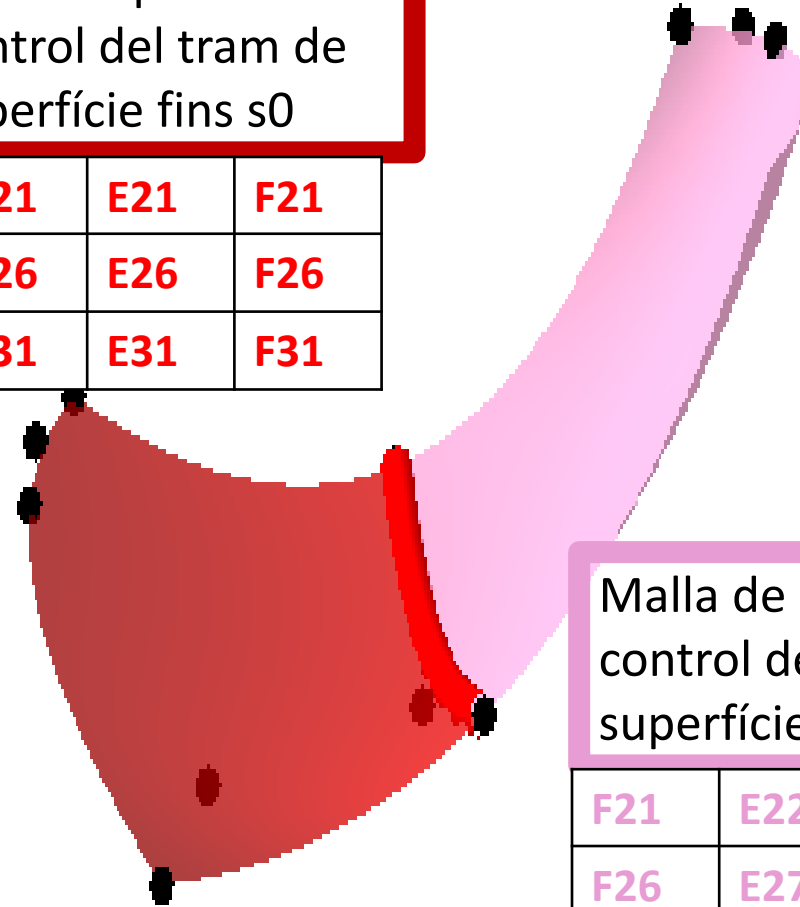
# Aplicació algoritme de Casteljau

## Subdivisió Superfície Bézier biquadràtica

	D	E	F
21	A00	$(1 - s_0) D_{21} + s_0 D_{22}$	$(1 - s_0) * E_{21} + s_0 * E_{22}$
22	A10	$(1 - s_0) D_{22} + s_0 D_{23}$	
23	A20		
24			
25			
26	A01	$(1 - s_0) D_{26} + s_0 D_{27}$	$(1 - s_0) * E_{26} + s_0 * E_{27}$
27	A11	$(1 - s_0) D_{27} + s_0 D_{28}$	
28	A21		
29			
30			
31	A02	$(1 - s_0) D_{31} + s_0 D_{32}$	$(1 - s_0) * E_{31} + s_0 * E_{32}$
32	A12	$(1 - s_0) D_{32} + s_0 D_{33}$	
33	A22		

Malla de punts de control del tram de superfície fins  $s_0$

D21	E21	F21
D26	E26	F26
D31	E31	F31



Malla de punts de control del tram de superfície des de  $s_0$

F21	E22	D23
F26	E27	D28
F31	E32	D33

# Superfícies de Bézier i continuïtat geomètrica

## Continuïtat geomètrica de la unió de superfícies de Bézier

$\sigma(u, v)$  bigrau  $(n_1, n_2)$  i amb malla de control  $\{P_{i,j}\}$

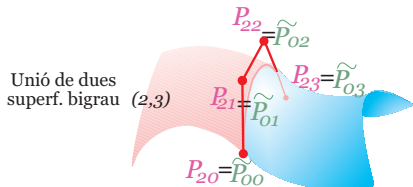
$\tilde{\sigma}(u, v)$  “ “ “  $\{\tilde{P}_{i,j}\}$

Les volem unir per les vores  $\sigma(1, v)$  i  $\tilde{\sigma}(0, v)$ . Aleshores, per tenir:

- **Continuïtat  $G^0$ :** Cal que coincideixi el polígon de control en la corba unió

unió  $P_{n_1 j} = \tilde{P}_{0 j}, \quad \forall j \in \{0, \dots, n_2\}$  darrera fila de  $\mathcal{P} = 1^a$  fila de  $\tilde{\mathcal{P}}$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{00} & \tilde{P}_{01} & \tilde{P}_{02} & \tilde{P}_{03} \\ \tilde{P}_{10} & \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} & \tilde{P}_{13} \\ \tilde{P}_{20} & \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} & \tilde{P}_{23} \end{pmatrix}$$



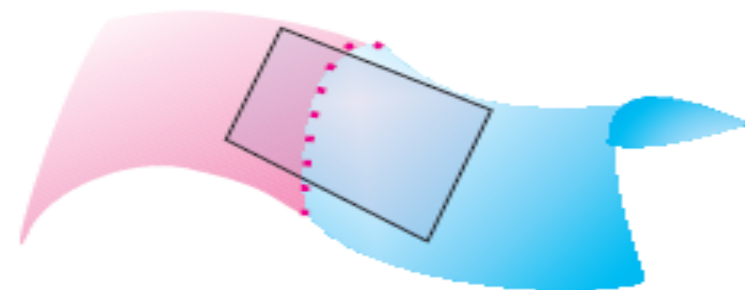
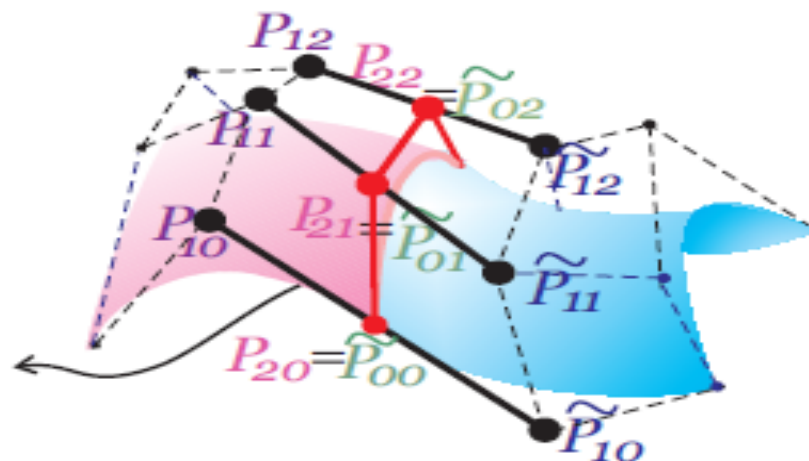
# Superfícies de Bézier i continuïtat geomètrica

- **Continuïtat  $G^1$** : Cal que coincideixin els plans tangents a les dues superfícies en els punts de la corba per on s'uneixen:

- **continuïtat  $G^0$**  i,

- $(\tilde{P}_{10}, \tilde{P}_{11}, \tilde{P}_{12}, \tilde{P}_{13}) = (1 - \lambda)(P_{20}, P_{21}, P_{22}, P_{23}) + \lambda(P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13})$

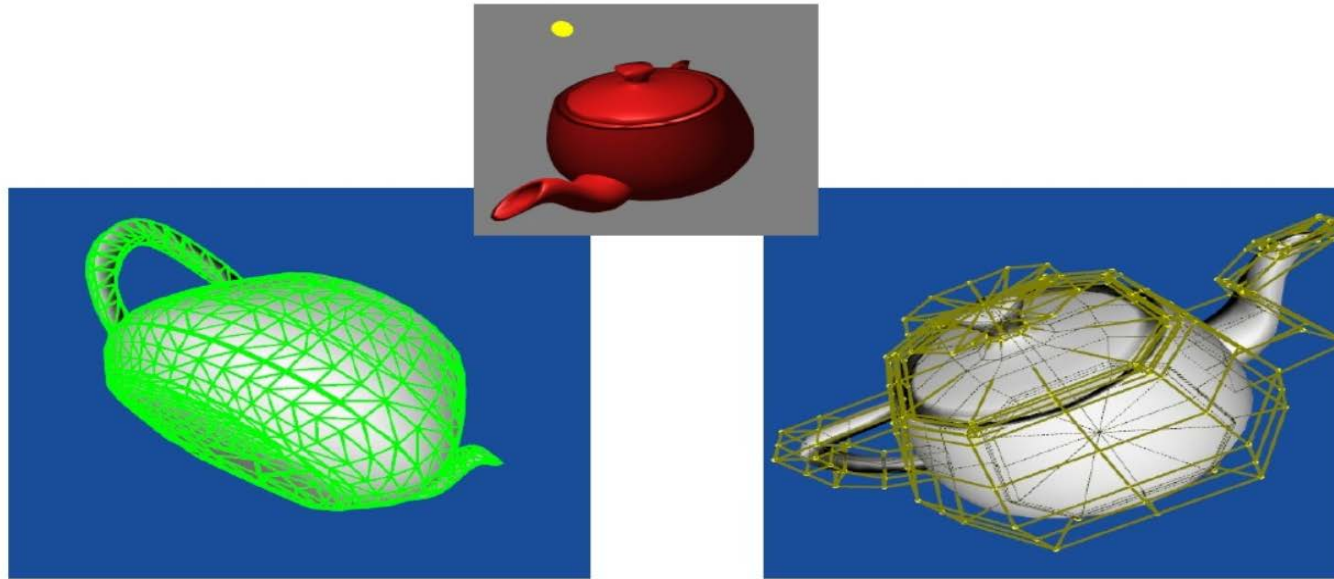
$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{00} & \tilde{P}_{01} & \tilde{P}_{02} & \tilde{P}_{03} \\ \tilde{P}_{10} & \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} & \tilde{P}_{13} \\ \tilde{P}_{20} & \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} & \tilde{P}_{23} \end{pmatrix}$$



# Exemples: Pedaços de Superfícies de Bézier

Utah Teapot: Bi-cubic Patch Mesh

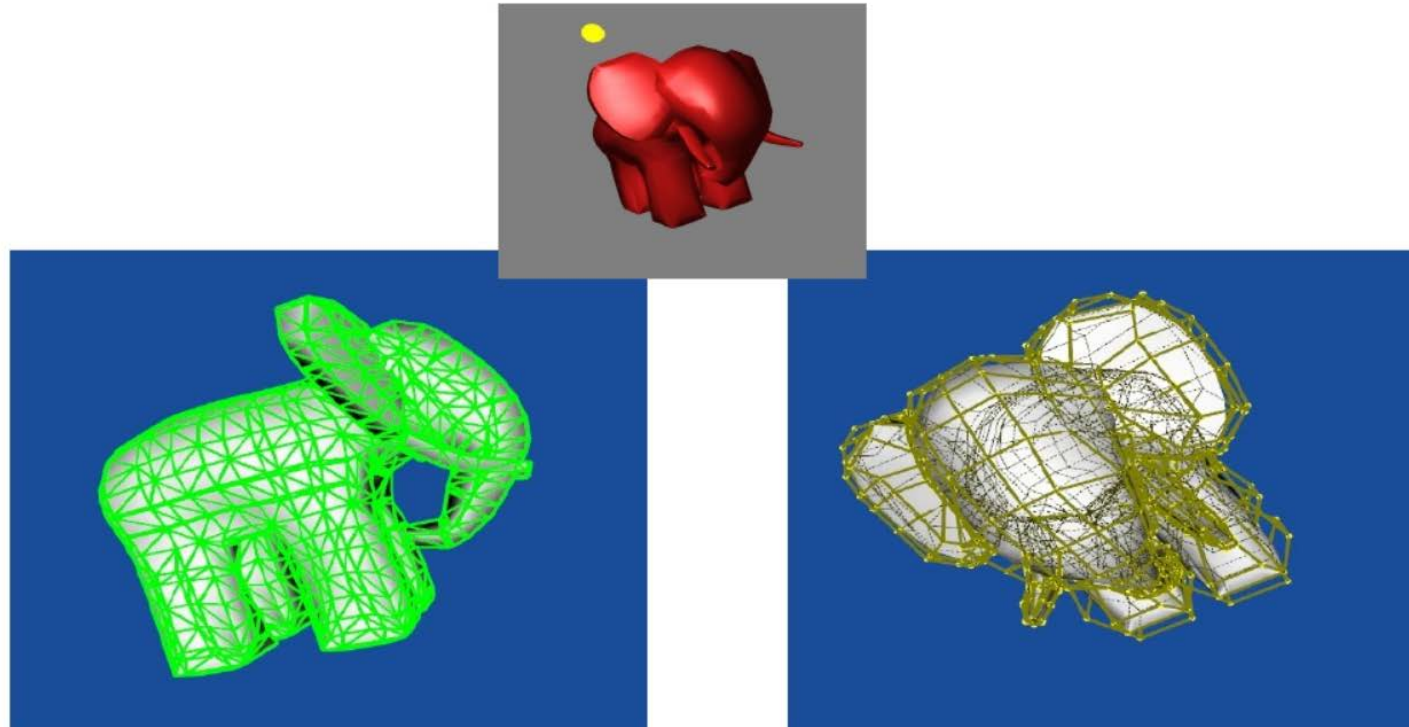
[Enllaç](#)



## Descripció [Enllaç](#)

- Primer objecte representat amb un programari gràfic (Martin Newell, Jim Blinn als anys 70).
- El programa va usar **32 pedaços de superfícies de Bézier cúbiques**.
- Es va imposar **continuitat  $G_1$**  entre els pedaços.

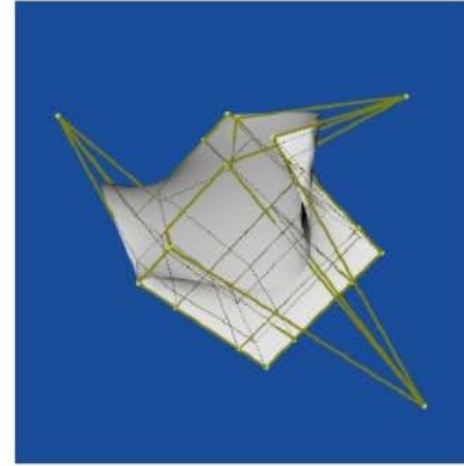
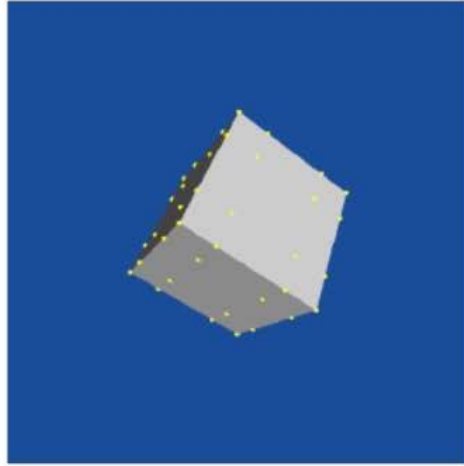
# Ed Catmull's Gumbo



## Descripció

- Dissenyat per **Edwin Earl "Ed" Catmull** (nascut al 1945, creador de Pixar, va contribuir com a expert informàtic al desenvolupament del disseny gràfic per ordinadors).
- Emprà **128 pedaços de superfícies de Bézier cúbiques** per representar-lo.

# Surfaces are Determined by Their Control Points



Moving control  
points displaces  
the evaluated  
surfaces

