Teoría – Tema 2

Teoría - 5 - posición relativa de una función respecto de sus asíntotas

Cortes de una función con sus asíntotas. Posición relativa de una función respecto de sus asíntotas

Una función nunca, nunca, nunca corta a una recta vertical que sea A.V. Recuerda que la A.V. puede aparecer a la izquierda y/o a la derecha de un valor $x=x_0$.

Una función sí puede cortar a la A.H. y a la A.O. En el infinito la función se acerca tanto como quiera a la A.H. y a la A.O. sin llegar a cortarla, pero antes de la idealización del infinito la gráfica de la función sí puede cortar a la A.H. y a la A.O.

Estudiar la posición relativa de una función respecto a sus asíntotas significa estudiar cómo se coloca la función respecto a las rectas que forman las asíntotas.

En A.V. hacemos los límites laterales y podremos decidir si la función va hacia más o hacia menos infinito.

En A.H. y en A.O. debemos comprobar si hay puntos de corte entre la función y las asíntotas. Y realizar una tabla de valores de las imágenes de la función y de las asíntotas para decidir quién está por encima o por debajo en los intervalos formado por el dominio de la función y los puntos de corte de la gráfica con la asíntota.

Ejemplo 1 resuelto

Estudiar la posición relativa de la función $f(x)=\frac{x}{x-1}$ **respecto de sus asíntotas.**

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$ → Candidato a A.V. $x=1$ → $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0}=\infty$ → Límites laterales

$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ → La función se dispara a menos infinito a la izquierda de $x=1$

$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ → La función se dispara a más infinito a la derecha de $x=1$

Al ser un cociente de polinomios, la A.H. en más infinito coincide con la A.H. en menos infinito.

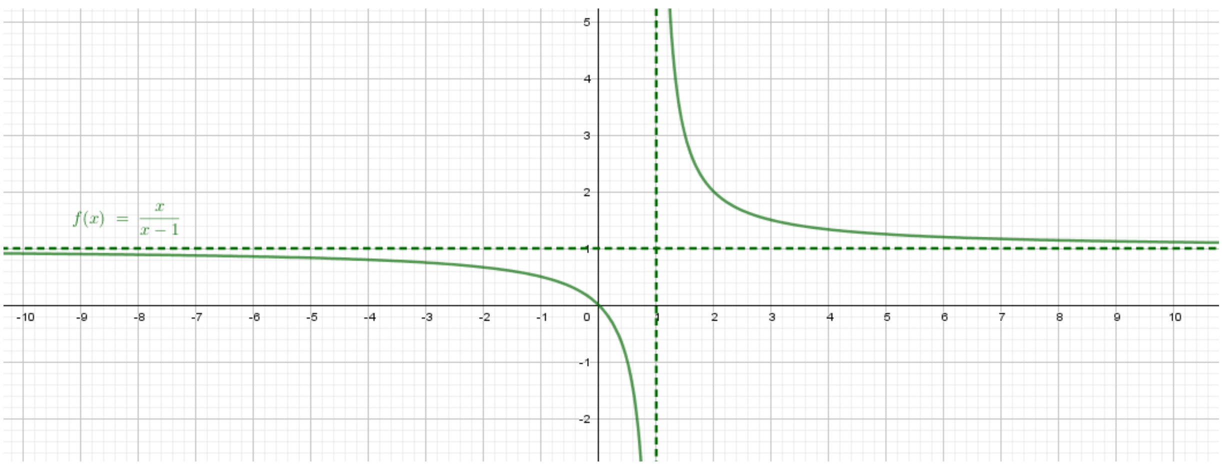
$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}=dividir\ \ por\ \ máxima\ \ potencia=1$ → $y=1$ A.H. si $x\to\pm\infty$

Para obtener los puntos de corte de la función con la A.H. igualamos la función a la ecuación de la asíntota.

$f(x)=1 \rightarrow \dfrac{x}{x-1}=1 \rightarrow x=x-1 \rightarrow 0=1$ → Absurdo → No hay puntos de corte

Para saber si la función está por encima o por debajo de la A.H. realizamos una tabla de valores en los intervalos formados por los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos de corte de la función con la A.H. (que en este caso, no hay).

Intervalo	**Función** $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$	**Asíntota Horizontal** $y=1$	**Conclusión**
$(-\infty,1)$	$f(0)=0$	$y=1$	$0<1$ La función está por debajo de la A.H.
$(1,\infty)$	$f(2)=2$	$y=1$	$2>1$ La función está por encima de la A.H.



Ejemplo 2 resuelto

Estudiar la posición relativa de la función $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ **respecto de sus asíntotas.**

$Dom(f)=(0,+\infty)$ → Candidato a A.V. $x=0$

Como el dominio es $(0,+\infty)$ solo tiene sentido preguntarse por el límite lateral derecho.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{-\infty}{0}=-\infty\cdot\infty=-\infty$ → La función va a menos infinito a la derecha de $x=0$

Como el dominio es $(0,+\infty)$ solo estudiaremos la A.H. en más infinito.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = L'\,Hôpital = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \to \quad y=0 \quad \text{A.H. si} \quad x\to+\infty$$

Para obtener los puntos de corte de la función con la A.H. igualamos la función a la ecuación de la asíntota.

$$f(x)=0 \quad \to \quad \frac{\ln(x)}{x}=0 \quad \to \quad \ln(x)=0 \quad \to \quad x=1 \quad \to \text{Hay un punto de corte}$$

Para saber si la función está por encima o por debajo de la A.H. realizamos una tabla de valores en los intervalos formados por los puntos que no pertenecen al dominio y los puntos de corte de la función con la A.H.

Intervalo	**Función** $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$	**Asíntota Horizontal** $y=0$	**Conclusión**
$(0,1)$	$f(1/2)=\frac{\ln(1/2)}{1/2}$ $f(1/2)\simeq-1{,}39$	$y=0$	$-1{,}39<0$ La función está por debajo de la A.H.
$(1,\infty)$	$f(2)=\frac{\ln(2)}{2}$ $f(2)\simeq0{,}35$	$y=0$	$0{,}35>0$ La función está por encima de la A.H.