



## 3

## Darstellungsformen von Ebenen

### Didaktische Hinweise

Mit dieser Station werden Schülerinnen und Schüler angeregt, die unterschiedlichen Formen der Gleichung einer Ebene anzuwenden und zu vergleichen, welche Form sich für unterschiedliche Fragestellungen besonders gut eignet. Sie wechseln zwischen den Darstellungsformen, um diese Vorteile zu nutzen.

Die Fähigkeit, flexibel unterschiedliche Darstellungsformen zu verwenden und diese adäquat anzuwenden, wird bei dieser Station besonders betont. Auch das Aufgabenformat macht einen solchen Wechsel deutlich: Einen Teil der Aufgaben lösen die Schülerinnen und Schüler „vorwärts“ nach Anleitungen, bei anderen Aufgaben kommentieren sie „rückwärts“ einen gegebenen Lösungsweg.

### Ziele

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ... beschreiben Ebenen im Raum durch verschiedene Formen der Ebenengleichung und können zwischen diesen Formen wechseln.
- ... wenden die unterschiedlichen Formen der Ebenengleichung zur Untersuchung der Lagebeziehungen von Ebenen zu anderen räumlichen Objekten an.
- ... beschreiben die Lage von Ebenen im Raum aufgrund der Eigenschaften der Ebenengleichung.
- ... beschreiben die Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Darstellungsformen von Ebenen.

...

### Übersicht der Materialien

- Schülerarbeitsblätter: Vorwärts Arbeiten  
Rückwärts Arbeiten  
Gegenüberstellung
- GeoGebra-Applet: *Ebenen\_Darstellung.ggb*



## **Arbeitsblatt**

Bei den folgenden Aufgaben geht es darum herauszufinden, für welche Fragestellung welche der verschiedenen Formen der Ebenengleichung vorteilhaft ist.

Zunächst lösen Sie die 1. Aufgabe. Dabei können Sie die Lösungsschritte wie in der Anleitung beschrieben ausführen.

Bei der 2. Aufgabe sind die Lösungsschritte bereits ausgeführt, und Sie sollen zu den einzelnen Schritten einen Kommentar wie in der ersten Aufgabe schreiben.

Zuletzt scheuen Sie beide Aufgaben noch einmal an und vergleichen, in welchen Fällen Ihnen die Lösung mit der Parameterform für die Ebene leichter gefallen ist und in welchen Fällen mit der Koordinatenform. Notieren Sie dies in folgender Zusammenfassung:

### **Gegenüberstellung**

Die Parameterform der Ebenengleichung ist gut geeignet, wenn ...

Die Koordinatenform der Ebenengleichung ist gut geeignet, wenn ...



1. Aufgabe „Vorwärts Arbeiten“

<p>a) Gegeben sind die Punkte <math>P(1 \mid 1 \mid 0)</math>, <math>Q(3 \mid 1 \mid 1)</math> und <math>R(1 \mid 0 \mid -1)</math>. Geben Sie eine Gleichung der Ebene in Parameterform und in Koordinatenform an.</p>	
<p>Stützpunkt wählen Spannvektoren bestimmen</p> <p>Stützpunkt und Spannvektoren in die Parameterform einsetzen</p>	
<p>Normalenvektor <math>\vec{n}</math> zu den Spannvektoren berechnen</p> <p>Koordinatenform berechnen.</p>	
<p>b) Gegeben sind die Ebene E und die Gerade g durch</p> $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ <p>Untersuchen Sie die Lage von g zu E.</p>	
<p>Terme von g und E gleichsetzen.</p> <p>LGS in den Unbekannten r, s und t lösen</p> <p>Aus der Zahl der Lösungen auf die Lage von g zu E schließen.</p>	
<p>Oder: Normalenvektor von E berechnen.</p> <p>Gleichung von E in Koordinatenform angeben</p> <p>Koordinaten der Punkte von g (abhängig vom Parameter t) in die Koordinatengleichung einsetzen.</p> <p>Aus der Zahl der Lösungen für t auf die Lage von g zu E schließen.</p>	



c) Gegeben sind die Ebenen E und F durch

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad F: 2x_1 + x_3 = 7$$

- Berechnen Sie die Spurpunkte von E und stellen Sie die Spurgeraden von E grafisch dar.

$x_1$ -Achse:  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 0$  setzen.  
LGS nach r und s auflösen.  
Lösung in die Gleichung von E einsetzen  
ebenso für die  $x_2$ - und  $x_3$ -Achse verfahren

Oder:  
Koordinatengleichung für E bestimmen  
  
Nacheinander für je zwei Koordinaten 0 einsetzen.

Spurpunkte in ein Koordinatensystem eintragen. Geraden durch die Spurpunkte zeichnen.

- Beschreiben Sie die besondere Lage von F.  
Aus dem fehlenden Term mit  $x_2$  auf die Lage von F in Bezug auf die y-Achse schließen.  
  
Spurpunkte mit der  $x_1$ - und der  $x_3$ -Achse ablesen

- Berechnen Sie die Schnittgerade von E und F.  
Koordinaten der Punkte von E (abhängig von den Parametern r und s) in die Koordinatengleichung von F einsetzen.  
  
Nach r oder s auflösen. Lösung in die Gleichung von E einsetzen und zusammenfassen.

- Bestimmen Sie jeweils den Abstand von E und F zum Koordinatenursprung.

normierten Normalenvektor für E berechnen.  
  
Mit diesem Normalenvektor die Koordinatengleichung für E aufstellen, Abstand ablesen.

Normalenvektor von F aus der Koordinatengleichung ablesen.  
  
Dessen Betrag berechnen und damit den Abstand berechnen.



2. Aufgabe „Rückwärts Arbeiten“

<p>a) Gegeben sind der Punkt <math>P(1   1   0)</math> und die Gerade <math>g</math> durch</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	
	<p><math>Q(3   1   1)</math>, <math>\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}</math> hat keine Lösung, also legen <math>P</math> und <math>g</math> eine Ebene fest.</p> $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
	<p><math>\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>\vec{n} \cdot \vec{q} = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 - 1 \cdot 6 = 9</math></p> <p><math>E: 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9</math> oder <math>x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3</math></p>
<p>b) Gegeben ist die Gerade <math>h</math> und die Ebene <math>F</math> durch</p> $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad F: 2x_1 + x_3 = 7$	
	<p><math>2t + 3 = 7 \Leftrightarrow t = 2</math> <math>h</math> durchstößt die Ebene <math>F</math> im Punkt <math>D(2   5   3)</math>.</p>
	<p><math>2x_1 + x_3 = 7 \Leftrightarrow x_3 = 7 - 2x_1</math></p> $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
	<p><math>\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}</math>, <math> \vec{n}  = \sqrt{5}</math></p> <p><math>\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}</math>, <math> \vec{u}  = \sqrt{5}</math></p> <p><math>\sin(\alpha) = \frac{ \vec{n} \cdot \vec{u} }{ \vec{n}  \cdot  \vec{u} } = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha \approx 23,6^\circ</math></p>
	<p><math>A(t   1 + 2t   3)</math></p> $d_{Ah} = \frac{7 - (2t + 3)}{\sqrt{5}} = \frac{4 - 2t}{\sqrt{5}}$ <p><math>d_{Ah} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow t = -3</math> also <math>A(-3   -5   3)</math></p>



## Lösungsvorschläge

### 1. Aufgabe „Vorwärts Arbeiten“

<p>a) Gegeben sind die Punkte <math>P(1 \mid 1 \mid 0)</math>, <math>Q(3 \mid 1 \mid 1)</math> und <math>R(1 \mid 0 \mid -1)</math>. Geben Sie eine Gleichung der Ebene in Parameterform und in Koordinatenform an.</p>	
<p>Stützpunkt wählen Spannvektoren bestimmen</p> <p>Stützpunkt und Spannvektoren in die Parameterform einsetzen</p>	$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
<p>Normalenvektor <math>\vec{n}</math> zu den Spannvektoren berechnen</p> <p>Koordinatenform berechnen.</p>	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{n} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$ $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3$
<p>b) Gegeben sind die Ebene E und die Gerade g durch</p> $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ <p>Untersuchen Sie die Lage von g zu E.</p>	
<p>Terme von g und E gleichsetzen.</p> <p>LGS in den Unbekannten r, s und t lösen</p>	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{ccc c} r & s & t & \\ \hline 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{array} \sim \dots \sim \begin{array}{ccc c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
<p>Aus der Zahl der Lösungen auf die Lage von g zu E schließen.</p>	<p>unendlich viele Lösungen, also liegt g in E.</p>
<p>Oder:</p> <p>Normalenvektor von E berechnen.</p> <p>Gleichung von E in Koordinatenform angeben</p> <p>Koordinaten der Punkte von g (abhängig vom Parameter t) in die Koordinatengleichung einsetzen.</p> <p>Aus der Zahl der Lösungen für t auf die Lage von g zu E schließen.</p>	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3$ $(3 + 2t) + 2(1 + 3t) - 2(1 + 4t) = 3$ $\Leftrightarrow 0 = 0$ <p>unendlich viele Lösungen, also liegt g in E.</p>



<p>c) Gegeben sind die Ebenen E und F durch</p> $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad F: 2x_1 + x_3 = 7$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Berechnen Sie die Spurpunkte von E und stellen Sie die Spurgeraden von E grafisch dar.</li> </ul>	
<p><math>x_1</math>-Achse: <math>x_2 = 0</math> und <math>x_3 = 0</math> setzen. LGS nach r und s auflösen. Lösung in die Gleichung von E einsetzen</p> <p>ebenso für die <math>x_2</math>- und <math>x_3</math>-Achse verfahren</p>	$1 + r = 0$ und $r + s = 0 \Leftrightarrow r = -1, s = 1$ $S_1(3 0 0)$  $1 + 2s = 0$ und $r + s = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}, s = -\frac{1}{2}$ $1 + 2s = 0$ und $1 + r = 0 \Leftrightarrow r = -1, s = -\frac{1}{2}$ $S_2(0 1,5 0), S_3(0 0 -1,5)$
<p>Oder: Koordinatengleichung für E bestimmen</p> <p>Nacheinander für je zwei Koordinaten 0 einsetzen.</p>	$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3$  $x_2 = 0, x_3 = 0, x_1 = 3, S_1(3 0 0)$ $x_1 = 0, x_3 = 0, x_2 = 1,5, S_2(0 1,5 0)$ $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -1,5, S_3(0 0 -1,5)$
<p>Spurpunkte in ein Koordinatensystem eintragen. Geraden durch die Spurpunkte zeichnen.</p>	<p>siehe GeoGebra-Arbeitsblatt <i>Ebenen_Darstellung.ggb</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Beschreiben Sie die besondere Lage von F.</li> </ul> <p>Aus dem fehlenden Term mit <math>x_2</math> auf die Lage von F in Bezug auf die y-Achse schließen.</p> <p>Spurpunkte mit der <math>x_1</math>- und der <math>x_3</math>-Achse ablesen</p>	<p>Die <math>x_2</math>-Achse ist parallel zu F.</p> <p>F schneidet die <math>x_1</math>-Achse in <math>A_1(3,5 0 0)</math> und die <math>x_3</math>-Achse in <math>A_3(0 0 7)</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Berechnen Sie die Schnittgerade von E und F.</li> </ul> <p>Koordinaten der Punkte von E (abhängig von r und s) in die Koordinatengleichung von F einsetzen. Nach r oder s auflösen.</p> <p>Lösung in die Gleichung von E einsetzen und zusammenfassen.</p>	$2(1 + 2s) + (r + s) = 7$ $\Leftrightarrow r = 5 - 5s$  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>Bestimmen Sie jeweils den Abstand von E und F zum Koordinatenursprung.</li> </ul> <p>normierten Normalenvektor für E berechnen.</p> <p>Mit diesem Normalenvektor die Koordinatengleichung für E aufstellen, Abstand ablesen.</p>	$\vec{n}_0 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  $E: \frac{1}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 - \frac{2}{3} x_3 = 1, \text{ also } d_0 = 1$
<p>Normalenvektor von F aus der Koordinatengleichung ablesen.</p> <p>Dessen Betrag berechnen und damit den Abstand berechnen.</p>	$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  $ \vec{n}_F  = \sqrt{5}, \text{ also } d_0 = \frac{7}{\sqrt{5}}$



2. Aufgabe: „Rückwärts Arbeiten“

<p>c) Gegeben sind der Punkt <math>P(1 \mid 1 \mid 0)</math> und die Gerade <math>g</math> durch</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	
<p>Den Verbindungsvektor zwischen <math>P</math> und dem Stützpunkt von <math>g</math> berechnen.</p> <p>Prüfen, ob der Verbindungsvektor kollinear zum Richtungsvektor von <math>g</math> ist, also begründen, dass <math>P</math> und <math>g</math> eine Ebene festlegen.</p>	<p><math>Q(3 \mid 1 \mid 1)</math>, <math>\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}</math> hat keine Lösung, also legen <math>P</math> und <math>g</math> eine Ebene fest.</p>
<p>Eine Gleichung dieser Ebene in Parameterform aufstellen.</p>	$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
<p>Eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform aufstellen.</p>	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ <p><math>\vec{n} \cdot \vec{q} = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 - 1 \cdot 6 = 9</math></p> <p><math>E: 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9</math> oder <math>x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3</math></p>
<p>d) Gegeben ist die Gerade <math>h</math> und die Ebene <math>F</math> durch</p> $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad F: 2x_1 + x_3 = 7$	
<p>Den Durchstoßpunkt von <math>h</math> mit <math>F</math> berechnen.</p>	<p><math>2t + 3 = 7 \Leftrightarrow t = 2</math> <math>h</math> durchstößt die Ebene <math>F</math> im Punkt <math>R(2 \mid 5 \mid 3)</math>.</p>
<p>Eine Gleichung von <math>F</math> in Parameterform bestimmen.</p>	<p><math>2x_1 + x_3 = 7 \Leftrightarrow x_3 = 7 - 2x_1</math></p> $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
<p>Den Betrag des Normalenvektors von <math>F</math> berechnen.</p> <p>Den Betrag des Richtungsvektors von <math>h</math> berechnen.</p> <p>Den Winkel zwischen <math>F</math> und <math>h</math> berechnen.</p>	<p><math>\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}</math>, <math> \vec{n}  = \sqrt{5}</math></p> <p><math>\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}</math>, <math> \vec{u}  = \sqrt{5}</math></p> <p><math>\sin(\alpha) = \frac{ \vec{n} \cdot \vec{u} }{ \vec{n}  \cdot  \vec{u} } = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha \approx 23,6^\circ</math></p>
<p>Den Abstand eines beliebigen Punktes von <math>h</math> zu <math>F</math> berechnen.</p> <p>Den Punkt von <math>h</math> berechnen, für den der Abstand <math>2\sqrt{5}</math> beträgt.</p>	<p><math>A(t \mid 1 + 2t \mid 3)</math></p> $d_{Ah} = \frac{7 - (2t + 3)}{\sqrt{5}} = \frac{4 - 2t}{\sqrt{5}}$ <p><math>d_{Ah} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow t = -3</math> also <math>A(-3 \mid -5 \mid 3)</math></p>