BALEARES

1) Se trazar una recta $\boldsymbol{e}$ desde el centro $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{C_3}$ hasta la intersección de la recta tangente $\overline{\boldsymbol{AB_1}}$ a ella con $\boldsymbol{C_1}$, se tendrá que dicha recta es $\overline{\boldsymbol{FB_1}}$ y que de momento supondremos conocer su valor (Hipótesis).

2) Primeramente se toma en cuenta algunas consideraciones:

$\overline{AB} = \overline{AB_1} = D \quad \overline{FL} = \overline{AE} \qquad\qquad \overline{FB_1} = e$
$\overline{AL} = \overline{NE} = \overline{EM} = \overline{OF} = \overline{FG} = \overline{NO} = \overline{EF} = \overline{MG} = r$

Al mirar la graficar y medir algunas distancias, se obtiene que: $\quad \overline{AB} = D = 5 \qquad r = 0{,}8\hat{3} = \frac{5}{6}$

Al trazar una recta perpendicular a D y que corte en F, se forman los segmentos $\overline{\boldsymbol{FL}}$, $\overline{\boldsymbol{AL}}$ y $\overline{\boldsymbol{LB}}$.
A trazar una recta desde el punto F hasta B, se forma el segmento $\overline{\boldsymbol{FB}}$.
Así, se forma el triangulo ΔFLB. Ahora basta encontrar sus respectivos lados, y así encontrar la relación.
El segmento $\overline{\boldsymbol{BB_1}} = d$ no pasa por el radio de C_3, por lo que no se la tomamos en cuenta.

3) Deseamos encontrar la relación que existe entre el radio r de C_3 y el radio D de C_1 y C_2. Para ello, aplicamos Teorema de Pitágoras en el triangulo ΔFLB

$(\overline{AB} + r)^2 = (\overline{AB} - \overline{AL})^2 + \overline{AE}^2$
$(D + r)^2 = (D - r)^2 + \overline{AE}^2$
Como $\quad \overline{AE}^2 = [\overline{AB_1} - (\overline{B_1N} + \overline{NE})]^2$ entonces:
$(D + r)^2 = (D - r)^2 + [\overline{AB_1} - (\overline{B_1N} + \overline{NE})]^2$
$(D + r)^2 = (D - r)^2 + [D - (\overline{B_1N} + r)]^2 \qquad$ (I)

Hallamos $\overline{B_1N}$. Aplicamos Teorema de Pitágoras en el triangulo ΔB_1EF

$\overline{FB_1}^2 = \overline{EF}^2 + (\overline{B_1N} + \overline{NE})^2$
$e^2 = r^2 + (\overline{B_1N} + r)^2$
$\overline{B_1N} = \sqrt{e^2 - r^2} - r \qquad$ (II)

Sustituimos (II) en (I):

$(D + r)^2 = (D - r)^2 + [D - (\sqrt{e^2 - r^2} \cancel{- r + r})]^2$
$(D + r)^2 = (D - r)^2 + [D - (\sqrt{e^2 - r^2})]^2 \qquad$ (III)

4) Ahora buscamos el valor de “e”, ya que solo se había hecho una suposición de su valor. Entonces despejamos “e”.

$(D + r)^2 = (D - r)^2 + [D - (\sqrt{e^2 - r^2})]^2$
$(D + r)^2 = D^2 - 2Dr \cancel{+ r^2} + D^2 - 2D\sqrt{e^2 - r^2} + e^2 \cancel{- r^2}$
$(D + r)^2 - 2D^2 + 2Dr - e^2 = -2D\sqrt{e^2 - r^2}$
$[(D + r)^2 + 2Dr - 2D^2 - e^2]^2 = (-2D\sqrt{e^2 - r^2})^2$

Desarrollando y simplificando ambos lados, e igualando a cero quedaría:

$r^4 + 8Dr^3 + 14D^2r^2 - 2e^2r^2 - 8D^3r - 8De^2r + D^4 + e^4 + 2D^2e^2 = 4D^2e^2 - 4D^2r^2$
…
$e^4 - (2r^2 + 8Dr + 2D^2)e^2 + r^4 + 8Dr^3 + 18D^2r^2 - 8D^3r + D^4 = 0$

Aplicamos un cambio de variable. Luego aplicamos la resolvente por ser una ecuación de segundo grado, y después volvemos a colocar su variable correspondiente:

$u = e^2 \quad u^2 = e^4 \qquad a = 1 \qquad b = -(2r^2 + 8Dr + 2D^2) \qquad c = r^4 + 8Dr^3 + 18D^2r^2 - 8D^3r + D^4$

$u^2 - (2r^2 + 8Dr + 2D^2)u + r^4 + 8Dr^3 + 18D^2r^2 - 8D^3r + D^4 = 0$
…
$u = r^2 + 4Dr + D^2 \pm 4D\sqrt{Dr}$
$e^2 = r^2 + 4Dr + D^2 \pm 4D\sqrt{Dr}$
$e = \sqrt{r^2 + 4Dr + D^2 \pm 4D\sqrt{Dr}} \qquad$ (IV)

5) Luego, sustituimos (IV) en (III)

$$(D+r)^2 = (D-r)^2 + [D - (\sqrt{e^2 - r^2})]^2$$
$$(D+r)^2 = (D-r)^2 + \left[D - \sqrt{\left(\sqrt{r^2 + 4Dr + D^2 \pm 4D\sqrt{Dr}}\right)^2 - r^2}\right]^2$$
$$(D+r)^2 = (D-r)^2 + [D - (\sqrt{\cancel{r^2} + 4Dr + D^2 \pm 4D\sqrt{Dr} \cancel{- r^2}})]^2$$
$$(D+r)^2 = (D-r)^2 + [D - (\sqrt{4Dr + D^2 \pm 4D\sqrt{Dr}})]^2$$
$$(D+r)^2 = (D-r)^2 + \left[D - \sqrt{D\left(4r + D \pm 4\sqrt{Dr}\right)}\right]^2 \qquad \text{(V)}$$
$$\overline{FB}^2 = \overline{BL}^2 + \overline{FL}^2 \qquad \Delta FLB \qquad \text{(VI)}$$

6) Sustituimos y evaluamos los valores de D y r en (V) y (VI)

$$\left(5+\frac{5}{6}\right)^2 = \left(5-\frac{5}{6}\right)^2 + \left[5 - \sqrt{5\left(4\left(\frac{5}{6}\right) + 5 \pm 4\sqrt{(5)\left(\frac{5}{6}\right)}\right)}\right]^2$$

Cuando es positivo	Cuando es negativo
$\frac{1225}{36} = \frac{625}{36} + \left[5 - \sqrt{\frac{125}{3} + \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right]^2$ $\frac{1225}{36} = \frac{625}{36} + \left(-10\sqrt{\frac{125}{3} + \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} + \frac{200}{3} + \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ $\frac{1225}{36} = \frac{3025}{36} - 10\sqrt{\frac{125}{3} + \frac{50\sqrt{6}}{3}} + \frac{50\sqrt{6}}{3}$ $34{,}02\hat{7} = 34{,}02\hat{7}$	$\frac{1225}{36} = \frac{625}{36} + \left[5 - \sqrt{\frac{125}{3} - \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right]^2$ $\frac{1225}{36} = \frac{625}{36} + \left(-10\sqrt{\frac{125}{3} - \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} + \frac{200}{3} - \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ $\frac{1225}{36} = \frac{3025}{36} - 10\sqrt{\frac{125}{3} - \frac{50\sqrt{6}}{3}} - \frac{50\sqrt{6}}{3}$ $34{,}02\hat{7} = 34{,}02\hat{7}$

$$FB = \sqrt{(D+r)^2} = \sqrt{\left(5+\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1225}{36}} = 5.8\hat{3}$$
$$BL = \sqrt{(D-r)^2} = \sqrt{\left(5-\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{625}{36}} = 4.1\hat{6}$$
$$FL = \sqrt{\left[D - \sqrt{D\left(4r + D \pm 4\sqrt{Dr}\right)}\right]^2} = \sqrt{\left[5 - \sqrt{5\left(4\left(\frac{5}{6}\right) + 5 + 4\sqrt{(5)\left(\frac{5}{6}\right)}\right)}\right]^2} = \sqrt{\left[5 - \sqrt{\frac{125}{3} + \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right]^2}$$
$$FL = \sqrt{\left(-10\sqrt{\frac{125}{3} + \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} + \frac{200}{3} + \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)} = 4.082482\ldots$$

$\overline{FB}^2 = \overline{BL}^2 + \overline{FL}^2$
$(5.8\hat{3})^2 = (4.1\hat{6})^2 + (4.082482)^2$
$33{,}9889 = 17{,}3056 + 16{,}670889$
$33{,}98 = 33{,}98$
$\therefore \exists \overline{FB}^2 = \overline{BL}^2 + \overline{FL}^2$

Entonces, se puede establecer una relación entre D y r. R: $(D+r)^2 = (D-r)^2 + \left[D - \sqrt{D\left(4r + D \pm 4\sqrt{Dr}\right)}\right]^2$

R : $\overline{FL}^2 = \left[D - \sqrt{D\left(4r + D \pm 4\sqrt{Dr}\right)}\right]^2 \Rightarrow \overline{\overline{AE}} = \overline{FL} = D - \sqrt{D\left(4r + D \pm 4\sqrt{Dr}\right)}$