☺ Distribución Multinomial. X ~ Mult.(n,p).

Una v. a. $X=(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ tiene distribución Multinomial de parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $p=(p_1, p_2, \ldots, p_k) \in (0,1)^k$. Siendo, $p_1+p_2+\ldots+p_k=1$, si tiene como función de probabilidad:

$$f_X(x)=0 \cdot I_{\{\mathbb{R}^n-(\{0,1,\ldots,n\})^n\}}(x)+\frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \ldots \cdot x_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{x_k} \cdot I_{\{\mathbb{R}^n-(\{0,1,\ldots,n\})^n\}}(x)$$

donde $x=(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (\{0,1,2,\ldots,n\})^n$, tal que $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$

La distribución es una generalización de la binomial, puesto que si $k=2$, es decir $X=(X_1, X_2)$ es una distribución binomial. Además, hay que observar que la expresión:

$$\frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \ldots \cdot x_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{x_k}$$

para todos los posibles valores $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (\{0,1,2,\ldots,n\})^n$, tal que $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$. son los términos generales del desarrollo multinomial $(p_1, p_2, \ldots, p_k)^n$.

Si $X \sim Mult(n,p)$ como cada Variable marginal $X_i \sim Bi(n, p_i), i=1,2,\ldots,k$, resulta:

$$E\{X_i\}=n \cdot p_i \quad ; \qquad Var(X_i)=n \cdot p_i \cdot (1-p_i) \quad .$$

por tanto

$$E\{X\}=E\{(X_1, X_2, \ldots, X_k)\}=(n \cdot p_1, n \cdot p_1, \ldots, n \cdot p_k)$$

Y como $\forall i, j \in \{1,2,\ldots,k\}$ con $i \neq j$, se cumple:

$$Var(X_i+X_j)=n \cdot (p_i+p_j) \cdot (1-p_i-p_j) \quad .$$

Además, como también se cumple:

$$\begin{aligned} Var(X_i+X_j) &= Var(X_i)+Var(X_j)+2 \cdot Cov(X_i, X_j)= \\ &= n \cdot p_i \cdot (1-p_i)+n \cdot p_j \cdot (1-p_j)+2 \cdot Cov(X_i, X_j) \end{aligned}$$

Que igualando las expresiones, obtenemos:

$$Cov(X_i, X_j)=-n \cdot p_i \cdot p_j$$