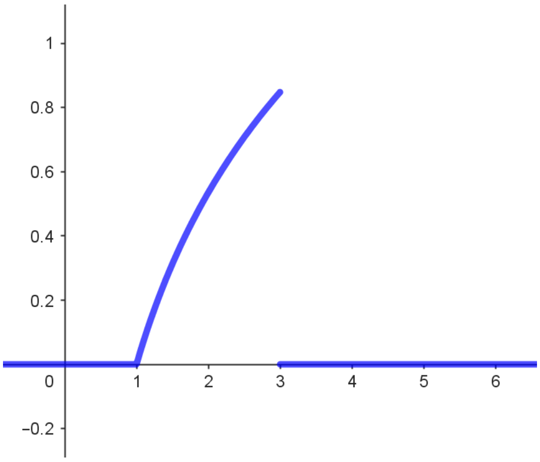
☺ Distribución Logarítmica. X ~ Logarítmica(a,b).

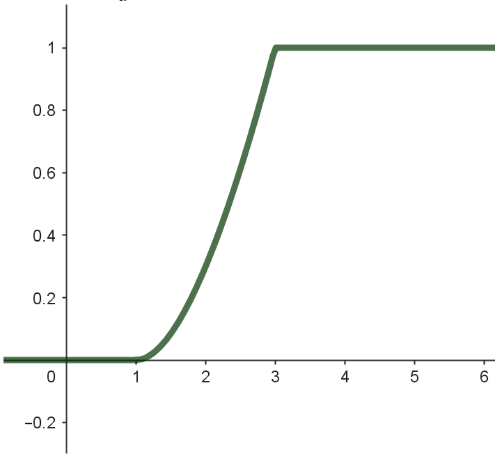
Una v. a. X tiene distribución Logarítmica de parámetro $a, b \in [1, +\infty), a < b$.

si tiene como función de densidad: $f_X(x) =$ $0 \cdot I_{\mathbb{R}-[a,b]}(x) + \frac{\ln x}{b \cdot (\ln b - 1) - a \cdot (\ln a - 1)} \cdot I_{[a,b]}(x)$

Y cuya función de distribución es: $F_X(x) =$ $0 \cdot I_{(-\infty,a)}(x) + \int_a^x f_X(x) \cdot dx . + 1 \cdot I_{(b,+\infty)}(x)$



Ejemplo de f(x) para a=1 y b=3



Ejemplo de F(x) para a=1 y b=3

Teniendo en cuenta que:

$$\int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - x + C ; C \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n \cdot \ln x \cdot dx = \frac{(n+1) \cdot x^{n+1} \cdot \ln x - x^{n+1}}{(n+1)^2} + C ; C \in \mathbb{R}$$

Fácilmente, se comprueba que f es una función de probabilidad, ya que:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \frac{1}{b \cdot (\ln b - 1) - a \cdot (\ln a - 1)} \cdot [x \cdot \ln x - x]_a^b = 1$$

Además

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) \quad .$$

Y algunos de sus parámetros o momentos destacables son:

✔ $E\{X^k\} = \int_a^b x^k \cdot f(x) \cdot dx = \frac{1}{b \cdot (\ln b - 1) - a \cdot (\ln a - 1)} \cdot \left[\frac{(n+1) \cdot x^{n+1} \cdot \ln x - x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_a^b ; \forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

En particular para $k = 1$: $E\{X\} = \frac{2 \cdot b^2 \cdot \ln b - b^2}{4} - \frac{2 \cdot a^2 \cdot \ln a - a^2}{4}$

En particular para $k = 2$: $E\{X^2\} = \frac{3 \cdot b^3 \cdot \ln b - b^3}{9} - \frac{3 \cdot a^3 \cdot \ln a - a^3}{9}$

✔ $E\{(X - E\{X\})^k\} = \int_a^b (x - E\{X\})^k \cdot f(x) \cdot dx ; \forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

En particular si $k = 2$:

$$E\left\{\left(X-E\{X\}\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{3\cdot b^3\cdot\ln b-b^3-3\cdot a^3\cdot\ln a+a^3}{9}-\frac{\left(2\cdot b^2\cdot\ln b-b^2-2\cdot a^2\cdot\ln a+a^2\right)^2}{16}$$