Problemas – Tema 3

Problemas resueltos - 6 - posición relativa de función respecto a una recta

1. Dada la curva $f(x)=x^3-3x^2+2$. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$. Determina si la curva de $f(x)$ queda por debajo o por encima de la recta tangente del apartado anterior

Calculamos $f'(x)$ y evaluamos en $x=1$ para hallar la pendiente.

Por otro lado, evaluamos $f(x)$ en $x=1$ para obtener un punto por el que pase la recta tangente:

$$f'=3x^2-6x \rightarrow f'(1)=-3$$

$$f(1)=1-3+2 \rightarrow f(1)=0 \rightarrow P(1,0)$$

Obtenemos la ecuación de la recta.

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=m \rightarrow \frac{y}{x-1}=-3 \rightarrow y=-3x+3$$

Para saber lo pedido debemos esbozar la gráfica. Para ello calculamos los candidatos a máximos y mínimos relativos anulando la primera derivada.

$f'=3x^2-6x=0 \rightarrow x=0 \;\; ; \;\; x=2$ → puntos críticos

Función $f(x)$	$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(-10)>0$	$f'(1)<0$	$f'(5)>0$

$x=0$ es un máximo relativo → $(0,2)$

$x=2$ es un mínimo relativo → $(2,-2)$

Estudiamos los posibles puntos de inflexión anulando la segunda derivada.

$f''=6x-6=0 \rightarrow \quad x=1$ → candidato a punto de inflexión

Función $f(x)$	$f(x)\cap$	$f(x)\cup$
Intervalos	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
Segunda derivada $f''(x)$	$f''(-0)<0$	$f''(5)>0$

Estimamos si la recta tangente corta a la función en puntos distintos al punto de tangencia $(1,0)$:

$f(x)=x^3-3x^2+2$, $y=-3x+3 \rightarrow \quad x^3-3x^2+2=-3x+3 \rightarrow \quad x^3-3x^2+3x-1=0$

$x^3-3x^2+3x-1=0$ → descomponer → $(x-1)^3=0$ → solución única $x=1$

Como muestra la siguiente gráfica $f(x)<y$ para $x<1$, $f(x)>y$ para $x>1$.