Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 22 - primeras aplicaciones del producto vectorial en rectas y planos

1. Obtener el valor $a\neq 0$ para que las siguientes rectas sean paralelas.

$$r:\left\{\begin{matrix} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{matrix}\right\} \quad , \quad s: x+1=\frac{y-3}{a}=\frac{z}{2}$$

Para comprobar que dos rectas son paralelas podemos obtener el vector director de ambas, y un vector formado por un punto de cada recta. El rango de esos tres vectores debe ser 2, y el rango de los vectores directores debe ser igual a uno.

O también podemos verlo como que su vectores directores son proporcionales (en este caso, podríamos tener tanto rectas paralelas como rectas coincidentes).

De la ecuación paramétrica de la recta s , obtenemos su vector director → $\vec{u}_s=(1,a,2)$

Y de la ecuación general de la recta r , podemos pasar a paramétrica para sacar su vector director, o bien realizar el producto vectorial de los vectores característicos de los planos que forman su ecuación general.

$$\vec{u}_r=(1,1,-5)\times(-2,0,1)=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\hat{i}+10\hat{j}+0-(-2\hat{k}+0+\hat{j})=\hat{i}+9\hat{j}+2\hat{k}=(1,9,2)$$

Y dos vectores son proporcionales si el cociente de sus componentes es proporcional.

$$\frac{1}{1}=\frac{9}{a}=\frac{2}{2} \quad \rightarrow \quad a=9$$

Como hemos razonado anteriormente, podríamos estar ante rectas paralelas o coincidentes. ¿Cómo decidir entre ambos casos?

Viendo si tienen al menos un punto en común. Si lo tienen, al ser sus vectores proporcionales, las rectas serán coincidentes. Si no lo tienen, las rectas serán paralelas.

De la ecuación continua de la recta s podemos obtener un punto $A\in s \rightarrow A(-1,3,0)$.

Sustituimos las coordenadas de este punto en la recta r para comprobar si satisface su ecuación general:

$$r:\left\{\begin{matrix} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} -1+3-5\cdot 0\neq -3 \\ -2(-1)+0\neq 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow A\notin r$$ → Las rectas son paralelas

2. Sea el plano $\Pi: x+2y+3z-1=0$ y la recta $r:\begin{cases} x=2z+4 \\ y=2z+3 \end{cases}$. Hallar la ecuación de la recta contenida en el plano Π y que corta perpendicularmente a la recta r en el punto $P(2,1,-1)$.

Para obtener la recta solución s necesitamos un punto de la recta y un vector director.

El punto nos lo da el enunciado → $P(2,1,-1)\in s$

El vector director de la recta será → $\vec{u}_s$

La recta s es perpendicular tanto a la recta r como al vector normal del plano Π . Por lo tanto, el vector director de la recta s será proporcional al producto vectorial de $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_\Pi$

Para obtener el vector director de la recta r , pasamos de ecuación general a paramétrica.

$$r:\begin{cases} x=2z+4 \\ y=2z+3 \end{cases} \rightarrow \text{si } z=\lambda \rightarrow r:\begin{cases} x=4+2\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r=(2,2,1)$$

El vector característicos del plano Π es → $\Pi: x+2y+3z-1=0 \rightarrow \vec{u}_\Pi=(1,2,3)$

$$\vec{u}_s=\vec{u}_r\times\vec{u}_\Pi \rightarrow \vec{u}_s=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{u}_s=(4,-5,2)$$

Y la recta solución en paramétricas resulta:

$$s:\begin{cases} x=2+4a \\ y=1-5a \\ z=-1+2a \end{cases}$$