LÍMITES DE FUNCIONES Y DE SUCESIONES

Índice:

1. Funciones reales de variable real. Sucesiones.

Una función real de variable real es una correspondencia f que asocia a cada elemento x de un determinado subconjunto de números reales un único elemento $y=f(x)$ de otro subconjunto de números reales.

Al subconjunto en el que que está definida la función, se le denomina **Dominio de definición o campo de existencia de la función f ,** y se denota por $Dom\, f$.

Al número x perteneciente al Dom f, se le denomina **variable independiente**.

Al número $y=f(x)$ asociado por f al valor x se le denomina **variable dependiente**.

Al subconjunto en el que está definido el conjunto de los números reales que toma la variable y, se designa por **Recorrido o imagen de la función f ,** y se denota por $\mathrm{Im}\, f$.

Luego podemos definir con notación matemática una función real real f definida en un conjunto A y con valores en un conjunto B como

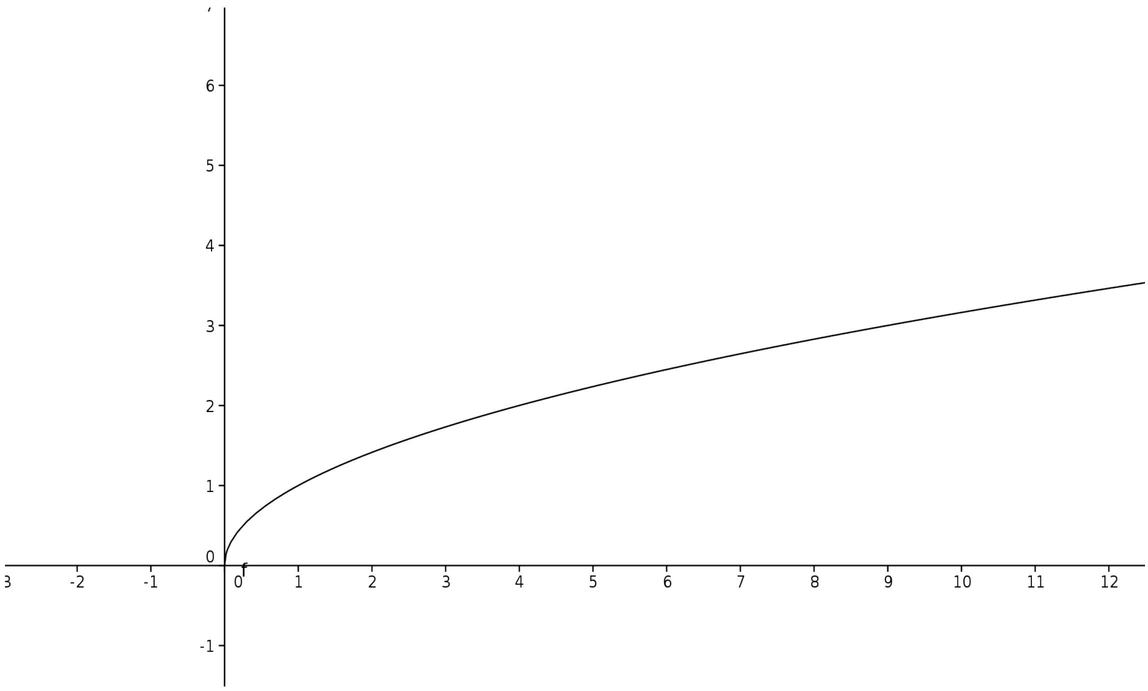
$$f: A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow y=f(x)$$

Habitualmente, solamente indicamos una función por su expresión algebraica $f(x)$. En cuyo caso, se considera:

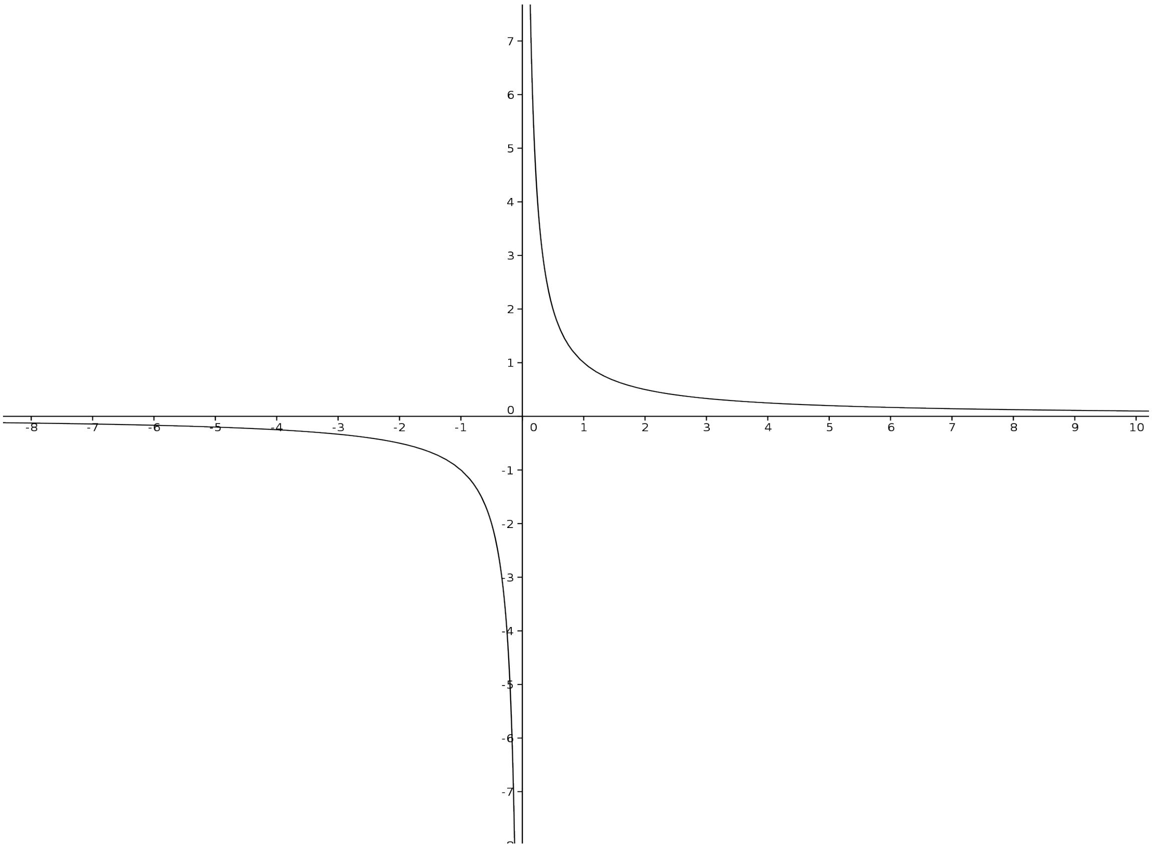
$$A=Dom\, f \subset \mathbb{R} \;\; y \;\; B=Ima\, f \subset \mathbb{R}$$

 # Ejemplos.-

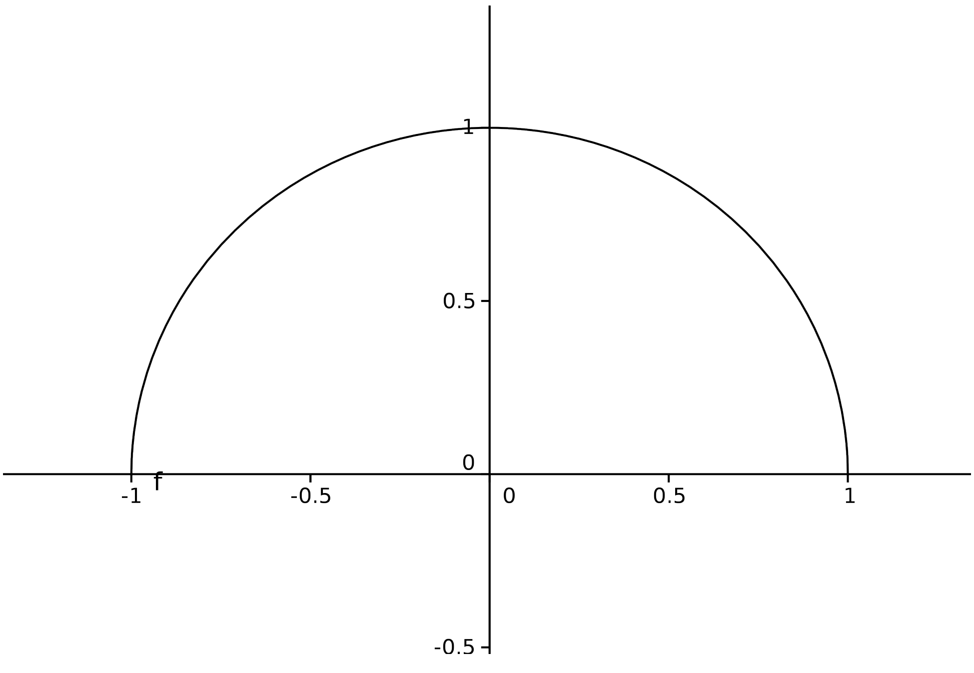
- *La función definida como $f(x)=\sqrt{x}$ tiene como dominio y recorrido máximo los números reales positivos y el cero.*



- *La función definida como* $f(x)=\frac{1}{x}$ *tiene como dominio y recorrido máximo los números reales menos el cero.*



- *La función definida como* $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ *tiene como dominio máximo el intervalo* $[-1,1]$ *y como recorrido máximo el intervalo* $[0,1]$.



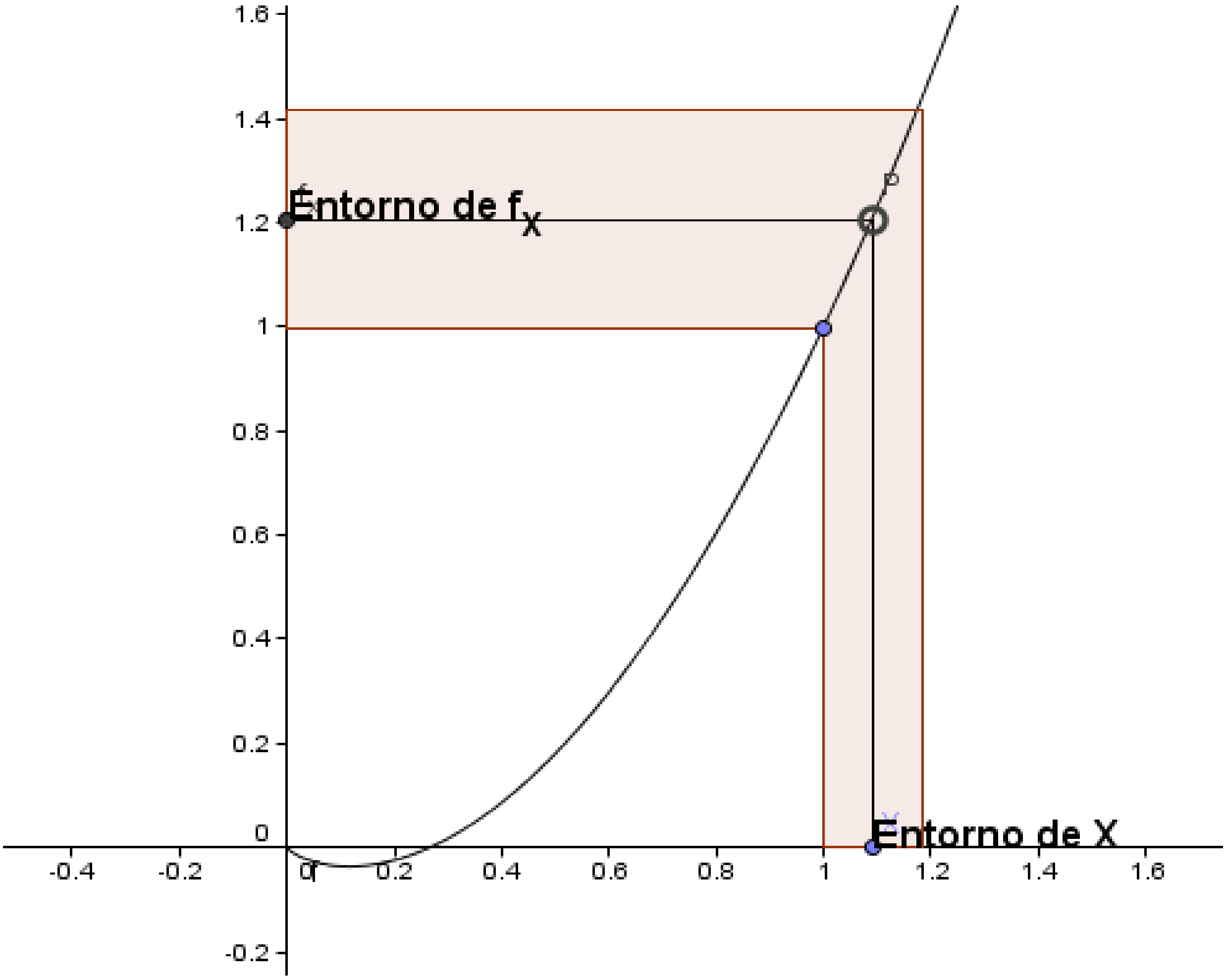
2 Límite finito de una función en un punto. Definición métrica.

Si I es un intervalo de la recta real, tal que ni $-\infty$ ni $+\infty$ sean extremos de I, c es un punto del intervalo I (*o de sus extremos*) y sea $f: I \to \mathbb{R}$ es una función real.

Decimos, que el límite de $f(x)$ tiene a L (*finito*), cuando x tiende c, y se escribe

$$\lim_{x\to c} f(x)=L$$

si para cualquier intervalo abierto (*entorno*) $H \subset f(I)$, existe un intervalo abierto (*entorno*) $J \subset I$, tal que $\forall x \in I, f(x) \in f(I)$



Utilizando notación matemática, podemos definir:

$\lim_{x\to c} f(x)=L$ **cuando** $\forall \epsilon>0 \exists \delta>0$ **tal que:**

$|f(x)-L|<\epsilon \quad \Rightarrow \quad |x-c|<\delta$

* *Teniendo en cuenta, que* ϵ *está definido en función de* δ $(\epsilon=\epsilon(\delta))$ *, y que dicha función es biyectiva* $(\delta=\delta(\epsilon))$ *, también solemos definir, como:*

$\lim_{x\to c} f(x)=L$ *cuando* $\forall \delta>0 \exists \epsilon>0$ *tal que:*

$|x-c|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-L|<\epsilon$

 # Ejemplo.-

- *Si* $f(x)=2.\mathrm{x}-3$ *, se cumple que* $\lim_{x\to 2} 2x-3=1$ *puesto que*

$$\forall\ \epsilon>0 \quad \textit{tal que} \quad |f(x)-1|=|(2x-3)-1|=|2x-4|<\epsilon$$

como se cumplirá

$$-2x+4<\epsilon<2x-4$$

es decir, se cumplirá las siguientes inecuaciones

$$-2x+4<\epsilon$$

$$2x-4<\epsilon$$

y despejando ϵ *en ambas inecuaciones*

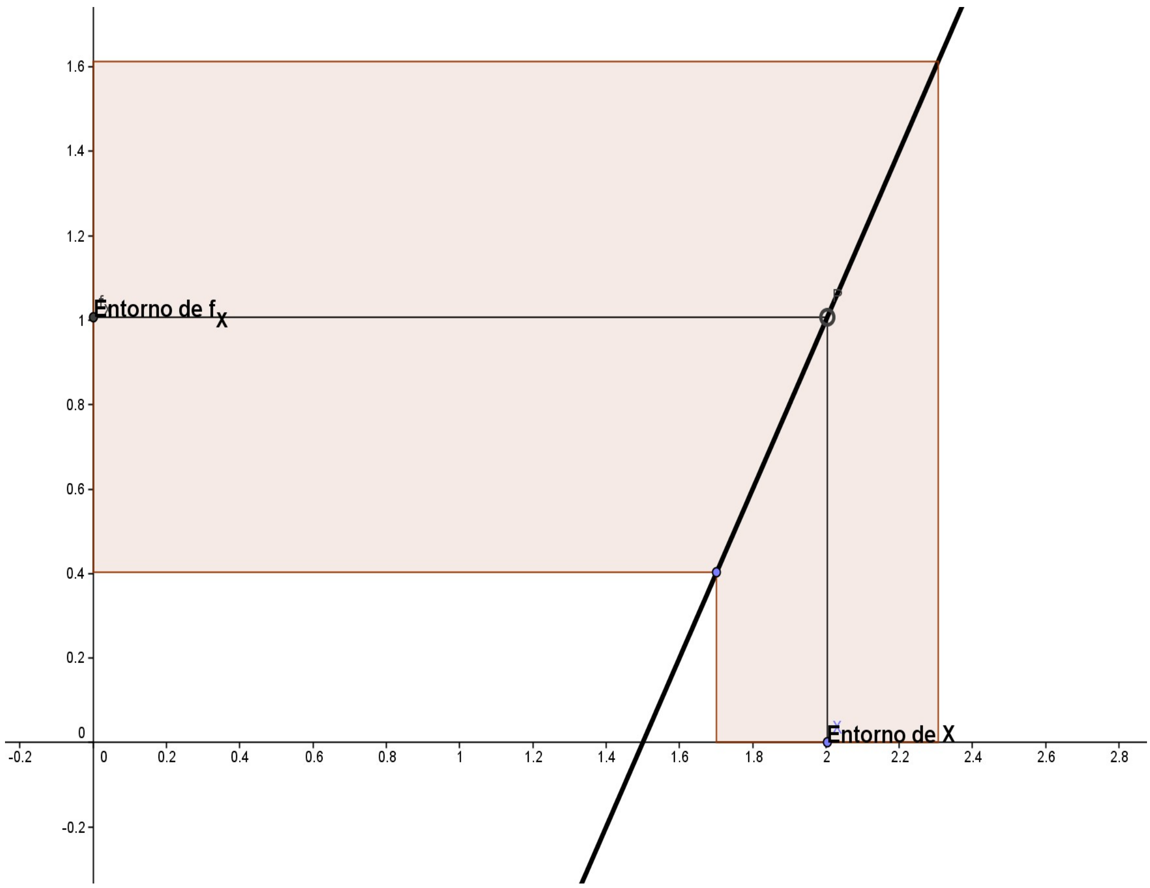
$$-2x+4<\epsilon \Rightarrow -2x<\epsilon-4 \Rightarrow 2x>-\epsilon+4 \Rightarrow x>-\frac{\epsilon}{2}+2$$

$$2x-4<\epsilon \Rightarrow 2x<\epsilon+4 \Rightarrow x<\epsilon+4 \Rightarrow x<\frac{\epsilon}{2}+2$$

Que equivale a

$$-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)+2<x<\left(\frac{\epsilon}{2}\right)+2 \quad \Rightarrow \quad |x-2|<\left(\frac{\epsilon}{2}\right)=\delta$$

Luego, si tomamos $\delta=\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ *, se cumple la definición.*



Sin embargo, en muchas ocasiones de forma intuitiva (*dando valores a x cercanos al punto c*) podemos deducir el $\lim_{x \to c} f(x)$

 # Ejemplo.- El $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$ *. Para ello, basta con que hagamos una tabla de valores y tomemos valores de* x *próximos a 2 (por la izquierda y por la derecha) de la cual se deduce dicho límite*

x	***1***	***1,9***	***1,99***	***1,999***	***1,999***	**…**	$\to$	***2***
x^2	***1***	***3,61***	***3,9601***	***3,996001***	***3,9996001***	**.. .**	$\to$	***4***
x	***3***	***2,1***	***2,01***	***2,001***	***2,0001***	**…**	$\to$	***2***
x^2	***9***	***4,41***	***4,0401***	***4,004001***	***4,00040001***	**.. .**	$\to$	***4***

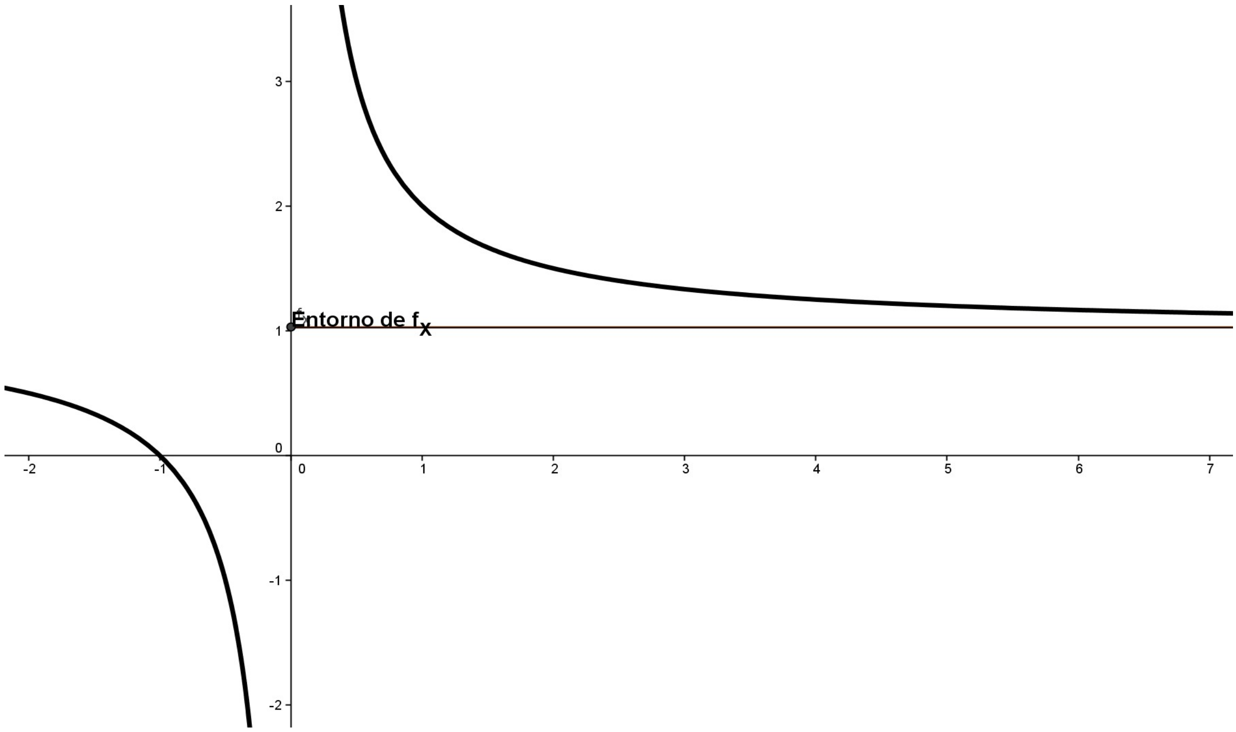
3 Límites infinitos de una función en un punto y límites en el infinito

☞ La definición de límite se puede extender al infinito, si tomamos $x \to -\infty$ *ó* $x \to +\infty$. Y también, se puede extender a límites infinitos, si tomamos $L = -\infty$ *ó* $L = +\infty$. Y teniendo en cuenta, que en el infinito los intervalos son de la forma $(-\infty, r)$ o $(r, +\infty)$, podemos definir de forma general $\lim_{x \to c} f(x) = L$ tal y como se resume en la siguiente tabla

$\lim_{x \to c} f(x) = L$	$L = -\infty$	$L \in \mathbb{R}$	$L = +\infty$
$c = -\infty$	$\forall\, t \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}$ / $f(x) < t \quad \Leftarrow x < s$	$\forall\, \epsilon > 0, \exists s \in \mathbb{R}$ / $\lvert f(x) - L \rvert < \epsilon \quad \Leftarrow x < s$	$\forall\, t \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}$ / $f(x) > t \quad \Leftarrow x < s$
$c \in \mathbb{R}$	$\forall\, t \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$ / $f(x) < t \quad \Rightarrow \lvert x - c \rvert < \delta$	$\forall\, \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ / $\lvert f(x) - L \rvert < \epsilon \quad \Rightarrow \lvert x - c \rvert < \delta$	$\forall\, t \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$ / $f(x) > t \quad \Rightarrow \lvert x - c \rvert < \delta$
$c = +\infty$	$\forall\, t \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}$ / $f(x) < t \quad \Leftarrow x > s$	$\forall\, \epsilon > 0, \exists s \in \mathbb{R}$ / $\lvert f(x) - L \rvert < \epsilon \quad \Leftarrow x > s$	$\forall\, t \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}$ / $f(x) > t \quad \Leftarrow x > s$

 # Ejemplo.-

- *La función* $f(x)=\frac{x+1}{x}$ *tiene* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$ *, puesto que* $\forall\,\epsilon>0$ *tal que* $|f(x)-1|=\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\epsilon$ *, será* $\left|\frac{1}{x}\right|<\epsilon \Rightarrow x>\frac{1}{\epsilon}=s$ *. Luego, si tomamos* $s=\frac{1}{\epsilon}$ *se cumple la definición.*



4 Límites laterales de una función en un punto

Si $\lim_{x\to c}f(x)=L$ y si $B\subset\mathbb{R}$ tal que $c\in B$, si $\exists\lim_{x\to c:x\in B}f(x)$, se cumplirá

$$\lim_{x\to c:x\in B}f(x)=L$$

Utilizando este resultado, si $c\in\mathbb{R}$, y definimos $B_{-}=(-\infty,c)$ y $B_{+}=(c,+\infty)$ podemos calcular los límites laterales de $f(x)$ en un punto c, cuando nos aproximamos a c por la izquierda y por la derecha respectivamente, y denominamos

$$\lim_{x\to c^-}f(x)=\lim_{x\to c:x\in B_-}f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c^+}f(x)=\lim_{x\to c:x\in B_+}f(x)$$

 # Ejemplo.-

- *Dada la función* $f(x)=x^2$ *, para calcular los límites laterales en* $x=2$ *, podemos definir las sucesiones que tienden a 2, por la izquierda y derecha respectivamente dadas por*

Límite por la izquierda							Límite por la derecha					
x	**1,90000**	**1,99000**	**1,99900**	**1,99990**	**...**		**x**	**2,10000**	**2,01000**	**2,00100**	**2,00010**	**...**
f(x)	$1{,}9^2$	$1{,}99^2$	$1{,}999^2$	$1{,}9999^2$	**...**		**f(x)**	$1{,}9^2$	$1{,}99^2$	$1{,}999^2$	$1{,}9999^2$	**...**

Que se observa que en ambos caso $f(x)$ *tiende a 4, cuando* x *tiende a 2*

☞ **Si** $L=\lim_{x\to c} f(x)$ **, se cumple** $\lim_{x\to c^-} f(x)=L=\lim_{x\to c^+} f(x)$.

Este resultado lo podemos utilizar para ver que una función f, no tiene límite en un punto c, si encontramos dos límites laterales distintos.

 # Ejemplo.-

- *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} 1 & si\, x<0 \\ 1+x & si\, 0\le x<1 \\ x^2 & si\, x\ge 1 \end{cases}$ *, para calcular si* $f(x)$ *tiene límite en* $x=0$ *y* $x=1$ *, Calculando los límites laterales, obtenemos:*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} 1=1=\lim_{x\to 0} x+1=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} x+1=2\neq 1 \lim_{x\to 1} x^2=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Luego, $f(x)$ *tiene por límite 1, en* $x=0$ *, y no tiene límite en* $x=1$

5 Propiedades de los límites.

Además, de existir **unicidad del límite de una función en un punto** (*es decir que no puede tener dos límites distintos en un mismo punto*) y de cumplirse que si los límites laterales de una función en un punto son distintos, no existe el límite, se cumplen las siguientes propiedades aritméticas de límites:

Si f y g son dos funciones tales que existen $\lim_{x\to c} f(x)$ *y* $\lim_{x\to c} g(x)$, y además, $\lim_{x\to c} f(x)=L$ *y* $\lim_{x\to c} g(x)=M$ con $L, M \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\lim_{x\to c} (f+g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)=L+M$$

$$\lim_{x\to c} (f-g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)=L-M$$

$$\lim_{x\to c} (f.g)(x)=\lim_{x\to c} f(x).\lim_{x\to c} g(x)=L.M$$

$$\lim_{x\to c} (\lambda.f)(x)=\lambda.\lim_{x\to c} f(x)=\lambda.L;\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{.\lim_{n\to c} g(x)}=\frac{L}{M};\quad si\ g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to c} f(x)^{\lim_{x\to c} g(x)}=L^M;\quad si\ f(x)>0$$

 # Ejemplo: $\lim_{x\to 2}(2x-2)^{x^2}=\lim_{x\to 2}(2x-2)^{\lim_{x\to 2} x^2}=(2.2-2)^{2^2}=2^4=16$

6 Límites indeterminados.

Decimos que $\lim_{x \to c} f(x)$ es un límite indeterminado, si al intentar calcular el límite como operación o composición de límites obtenemos en términos de límites expresiones de la forma

$$\frac{k}{0};\quad k \neq 0 \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad 0.\infty \quad ; \quad \infty - \infty \quad ; \quad 1^{\infty} \quad ; \quad \infty^{0} \quad ; \quad 0^{0}$$

En el caso de límites indeterminados si existen, no se pueden calcular directamente, si no que se debe de transformar la expresión previamente.

Indeterminación del tipo k / 0 , con k distinto de 0

Si al calcular el límite de una función obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{k}{0};\quad k \neq 0$, se hallan los límites laterales; si estos existen y son iguales, la función tiene límite y este coincide con el valor de los límites laterales. En caso contrario, no existe límite.

 # Ejemplos.-

- *Como* $\lim_{x \to 0} \frac{x+4}{x} = \frac{4}{0}$ *, es una indeterminación.*

  Hallamos los límites laterales

  $$\lim_{x \to 0^-} \frac{x+4}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x+4}{x} = +\infty$$

  Luego, como los límites laterales no coinciden, se tiene que no existe $\lim_{x \to 0} \frac{x+4}{x}$

- *Como* $\lim_{x \to 0} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{0}$ *, es una indeterminación.*

  Hallamos los límites laterales

  $$\lim_{x \to 0^-} \frac{4}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{4}{x^2} = +\infty$$

  Luego, como los límites laterales coinciden, se tiene

  $$\lim_{x \to 0} \frac{x+4}{x} = +\infty$$

Indeterminación del tipo 0 / 0

Si al calcular el límite de una función f obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, tendremos que distinguir entre dos casos para resolverla:

- Si f es una **función racional**, se descompone el numerador y el denominador en factores y se simplifica

- Si f es una **función con raíces cuadradas en el numerador (*o en el denominador*)**, multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del numerador (*o del denominador*)

  # Ejemplos.-

- *¿Para que valores el límite de la función* $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2-1}$ *es un límite indeterminado?. Calcula* $\lim_{x\to 1} f(x)$.

  El límite es indeterminado para los valores en los que se anula el denominador, es decir para $x=-1$ *y* $x=1$ *, ya que en estos casos se obtiene un límite de la forma* $\frac{0}{0}$ *, por ser*

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{(-1)^4-1}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1^4-1}{1^2-1}=\frac{0}{0}$$

  Sin embargo, como

$$\frac{x^4-1}{x^2-1}=\frac{(x^2-1).(x^2+1)}{x^2-1}=x^2+1$$

  Se cumple

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1} x^2+1=1^2+1=2$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1} x^2+1=1^2+1=2$$

- *Calculemos:* $\lim_{x\to 0}\frac{15x}{\sqrt{16-x}-4}$.

  Como

$$\lim_{x\to 0}\frac{15x}{\sqrt{16-x}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{\sqrt{16-0}-4}=\frac{0}{0}$$

Si multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{(15x).(\sqrt{16-x}+4)}{(\sqrt{16-x}-4).(\sqrt{16-x}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{(15x).(\sqrt{16-x}+4)}{16-x-16}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{15.(\sqrt{16-x}+4)}{-1}=-120$$

Indeterminación del tipo infinito / infinito

Si calculamos el límite de una función f obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Si $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ un polinomio de grado m y n respectivamente, se divide el numerador y el denominador entre la variable x^h , donde $h=min\{m,n\}$.

Si $f(x)=\frac{\sqrt[k]{P(x)}}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ un polinomio de grado m y n respectivamente, se divide el numerador y el denominador entre la variable x^h , donde $h=min\left\{\frac{m}{k},n\right\}$.

Si $f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt[k]{Q(x)}}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ un polinomio de grado m y n respectivamente, se divide el numerador y el denominador entre la variable x^h , donde $h=min\left\{m,\frac{n}{k}\right\}$.

 # Ejemplos:

- *Como* $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+2x-3}{2x^2+6}=\frac{\infty}{\infty}$

  Si dividimos el numerador y el denominador entre x^2 *, obtenemos*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{6}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{6}{x^2}}=\frac{6+0-0}{2+0}=\frac{6}{2}=3$$

- *Como* $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-2x+1}{\sqrt{x^4+6}}=\frac{\infty}{\infty}$

  Si dividimos el numerador y el denominador entre x^2 *, obtenemos*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4}+\frac{6}{x^4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{6}{x^4}}}=\frac{6-0+0}{\sqrt{1+0}}=5$$

Indeterminación del tipo infinito - infinito

Si se puede eliminar este tipo de indeterminación tendremos que distinguir dos casos:

- Si f es **diferencia de funciones racionales**, se efectúa previamente dicha operación para obtener una función racional, en la cual puede aparecer alguna indeterminación de las estudiadas anteriormente.
- Si f es **diferencia de funciones con raíces cuadradas**, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de la función.

 # Ejemplos.-

- *Como* $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4x+4}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}\right)=\infty-\infty$

Si efectuamos la diferencia de las dos fracciones, obtenemos:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4x+4}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{4x+4}{x^2-4}-\frac{3x+6}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{4}$$

- *Como* $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}=\infty-\infty$

Si multiplicamos y dividimos por $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}$ *, obtenemos:*

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}).(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5})}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x+5)-(x-5)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{10}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}}=\frac{10}{\infty}=0$$

Indeterminación del tipo 0 . infinito

Si podemos transformas la indeterminación $0.\infty$ ó $\infty.0$, en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, se resuelve la nueva indeterminación con los procedimientos explicados anteriormente.

 # Ejemplo.-

- *Como* $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{3}.\sqrt{\frac{1}{x-1}}\right)=0.\infty$

Si multiplicamos las funciones antes de calcular el límite, obtenemos:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{3}.\sqrt{\frac{1}{x-1}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{\frac{(x-1)^2}{9.(x-1)}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{\frac{x-1}{9}}\right)=0$$

Indeterminación del tipo 1 elevado a infinito

Si $\lim_{x\to c} f(x)=1$ y $\lim_{x\to c} g(x)=\pm\infty$. Al calcular $\lim_{x\to c} f(x)^{\lim_{x\to c} g(x)}$ aparecerá una indeterminación del tipo $1^{\pm\infty}$.

Para resolver este tipo de indeterminaciones, utilizamos la sucesión $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ya que sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n=e$ y teniendo en cuenta, que si $f(x)$ es una función real y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión real tal que $\lim_{n\to\infty} b_n=c$, entonces, $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{n\to\infty} f(b_n)$

 # Ejemplo.-

- *Como* $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3x+6)}{(3x-8)}\right)^{2x}=1^{\infty}$ *. Modificando la función, obtenemos*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3x+6)}{(3x-8)}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3x-8+14)}{(3x-8)}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{14}{3x-8}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-8}{14}}\right)^{\left(\frac{3x-8}{14}\right).2x.\left(\frac{14}{3x-8}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty} 2x.\left(\frac{14}{3x-8}\right)}=e^{\frac{28}{3}}=\sqrt[3]{e^{28}}$$

7 Continuidad de funciones.

Decimos que la función $f(x)$ **es continua en un punto c**, cuando existe $\lim_{x\to c} f(x)$ y se cumple $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$.

 # Ejemplo.-

- *La función* $f(x)=\frac{1}{x}$ *, no es continua en* $x=0$ *, ya que en este punto ni está definido* $f(0)$ *, ni existe el límite.*

La definición de continuidad de f en un punto c, equivale a las siguientes condiciones:

- Existe $f(c)$
- Existe $\lim_{x\to c} f(x)$
- Los dos valores anteriores coinciden: $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

 # Ejemplo.-

- *La función* $f(x)=2x+3$ *es continua en* $x=1$ *, ya que existen* $f(1)=5$ *,* $\lim_{x\to 1} f(x)=5$ *y los dos valores coinciden.*

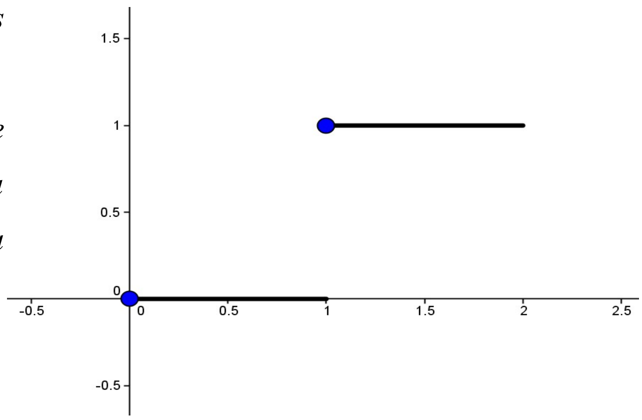
CONTINUIDAD LATERAL.

Decimos que la función $f(x)$ es continua por la izquierda en el punto c, cuando existe $\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c:x<c} f(x)$ y se cumple . $\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$

Decimos que la función $f(x)$ es continua por la derecha en el punto c, cuando existe $\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c:x>c} f(x)$ y se cumple . $\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$

 # Ejemplos.-

- *La función* $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si \quad x\leq 1 \\ x^2 & si \quad x>1 \end{cases}$ *es continua en x = 1, ya que* $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x-1=1=\lim_{x\to 1^+} x^2=\lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=1$ *y como* $f(1)=2,1-1=1$, $f(x)$ *es continua en* $x=1$.



- *La función* $f(x)=[x]$ *(parte entera de x), es continua por la derecha en* $x=1$ *, pero discontinua por la izquierda, ya*

  $\lim_{x\to 1^-} f(x)=0\neq f(1)=1$

  $\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=1$

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO.

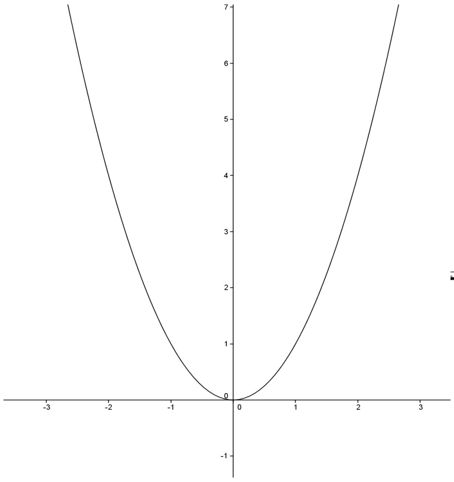
La función $f(x)$ es continua en un intervalo (a,b) si lo es en cada uno de sus puntos.

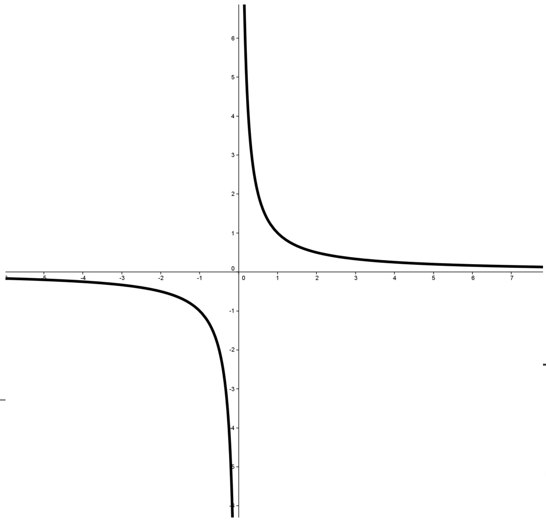
La función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ si lo es en cada uno de sus puntos de (a,b) , y además, es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

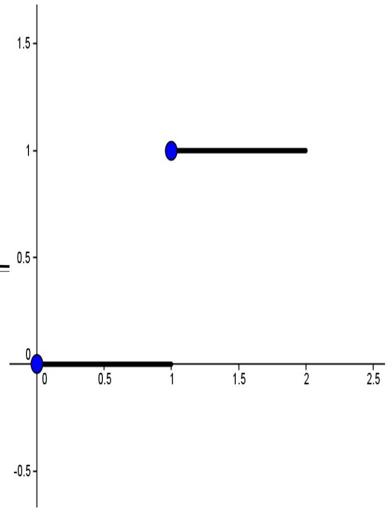
 # Ejemplo.-

- *Si observamos las gráficas de las funciones* $f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=[x]$, *vemos que* $f(x)$ *es continua en cualquier intervalo real,* $g(x)$ *no es continua en* $[-1,1]$ *, ya que* $g(x)$ *no está definida en* $x=0$ *, y la función* $h(x)$ *tampoco es continua en el intervalo* $[0,2]$ *, puesto que es discontinua en* $x=1$.

$f(x)$ $g(x)$ $h(x)$







Una función es continua en todo su dominio si lo es en todos sus puntos que lo componen.

Una función que es continua en todo valor real, diremos que es continua en $\mathbb{R}$, o simplemente que es continua.

Teniendo en cuenta, que si una función $f(x)$ está definida en el entorno simétrico de un punto c, entonces $f(x)$ es continua en $x=c$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$. Una función es discontinua en un punto $x=c$ cuando se cumple una de las dos condiciones siguientes

$$\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c) \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to c^-} f(x)\neq \lim_{x\to c^+} f(x)$$

$f(x)$ tiene una **discontinuidad evitable** en $x=c$, cuando existe $\lim_{x\to c} f(x)$ y existe $f(c)$, y se cumple $\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c)$ **.**

 # Ejemplo.-

- *La función* $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\, x\neq 1 \\ 1 & si\, x=1 \end{cases}$ *tiene una discontinuidad evitable en* $x=1$ *, de valor verdadero* $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

$f(x)$ tiene una **discontinuidad inevitable** (***de primera especie***) en $x=c$, cuando existe $\lim_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim_{x\to c^+} f(x)$, y se cumple $\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c)$ **.**

Además

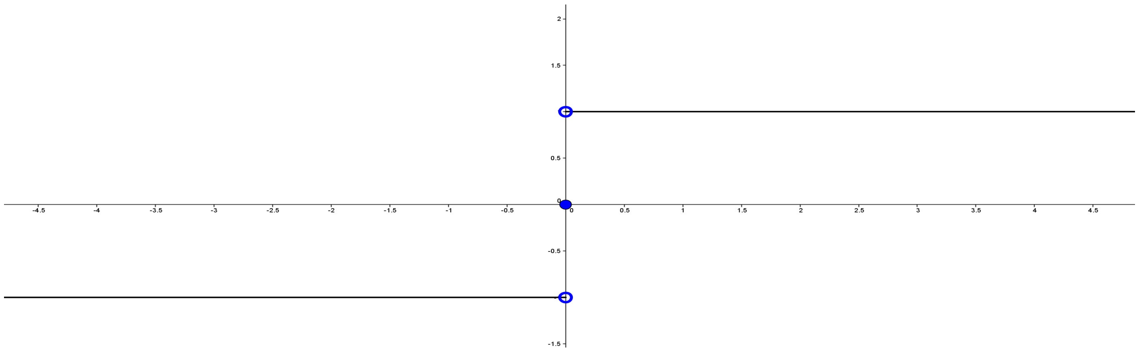
Si $\lim_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim_{x\to c^+} f(x)$ son finitos, decimos que $f(x)$ tiene en c **un salto finito**

Si alguno de los límites laterales de $f(x)$ en c es infinito, o los dos son infinitos, pero de distinto signo, decimos que $f(x)$ tiene en c **un salto infinito**

$f(x)$ tiene una **discontinuidad inevitable** (***de segunda especie***) en $x=c$, cuando no existe $\lim_{x\to c} f(x)$

 # Ejemplos.-

- *La función* $f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ -1 & si \quad x<0 \end{cases}$ *es una función de discontinuidad inevitable en* $x=0$. *El salto de la función en* $x=0$ *es 2.*



 # Ejemplo.- La función es $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *es una función de discontinuidad inevitable en* $x=0$. *El salto de la función* $x=0$ *es* ∞ .