# Cálculo de probabilidades

## Experimentos aleatorios. Espacio muestral.

En el estudio de la mayoría de fenómenos científicos o de otra índole, pueden suceder que al repetirlo, bajo las mismas condiciones, se obtenga siempre el mismo resultado, como puede ser el realizar diversas medidas (*masa, volumen, etc.*) , y que denominamos **experimento determinista**, mientras que si al repetir dicho experimento en las mismas condiciones, su resultado está sujeto al azar, como puede ser el posible resultado al extraer una carta de la baraja o el lanzamiento de una moneda o un dado, o prever la climatología que puede hacer los próximos días, etc., y que denominamos **experimento aleatorio.**

*# Ejemplo.- Si afirmamos que la probabilidad de obtener tres caras al lanzar tres monedas supuestamente equilibradas es* $\frac{1}{8}$ *, o de que hay probabilidad ligeramente inferior a* $\frac{1}{2}$ *de que un bebé recién nacido sea varón, o de que en los próximos años la probabilidad de que se pueda curar el cáncer es pequeña. Mientras que la primera afirmación se refiere a un juicio de probabilidad que podemos llamar clásico, la segunda afirmación es de tipo frecuentista, y la tercera afirmación constituye un ejemplo de lo que podríamos denominar juicio o medida de credibilidad, y es una medida de grado de confianza que tenemos de la verdad de una cierta proposición o en el acaecimiento de un suceso determinado.*

Los orígenes se remontan al estudio de los juegos de azar que se efectuaban en el siglo XVII. Además, ligado a la aparición de esta teoría se potenció las técnicas de conteo, como los métodos combinatorios.

Al conjunto de todos los resultados que pueden obtenerse al realizar un experimento aleatorio, se denomina **espacio muestral,** y que denotaremos por **E.**

*# Ejemplos.-*

- *En el experimento de lanzar una moneda y anotar el resultado de la cara superior, podemos tomar como espacio muestral* $E=\{C, X\}$
- *En el experimento de lanzar una moneda y un dado y anotar el resultado de la cara superior, podemos tomar como espacio muestral*
  $$E=\{(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),(X,1),(X,2),(X,3),(X,4),(X,5),(X,6)\}$$

## Suceso aleatorio

Se denomina **suceso aleatorio** a cada uno de los posibles subconjuntos de un espacio muestral **E**, de un experimento aleatorio.

Al conjunto de todos los sucesos aleatorios de un espacio muestral E, lo denominaremos **S**.

*# Ejemplo.- Si determinamos el experimento de lanzar una moneda y anotar el resultado de su cara superior, tendremos*

*Espacio muestral :* $E=\{C,X\}$

*Espacio de sucesos:* $S=\{\{\phi\},\{C\},\{X\},\{C,X\}\}$

## Distintos tipos de sucesos

### Sucesos elementales

Se llama sucesos elementales a los sucesos formados por un solo elemento del experimento aleatorio.

*# Ejemplo.- Un suceso elemental en el lanzamiento de un dado es:*

“Obtener un 1”$=\{1\}$

### Sucesos compuestos

Se llama sucesos compuestos a los sucesos formados por dos o mas elementos del experimento aleatorio.

*# Ejemplo.- Un suceso compuesto en el lanzamiento de un dado es:*

“Obtener un número par”$=\{2,4,6\}$

### Sucesos seguro

Se llama sucesos seguro a aquel suceso que siempre se cumple.

*# Ejemplo.- Un suceso seguro en el lanzamiento de un dado es:*

Obtener un 1, 2, 3, 4, 5 o 6$=\{1,2,3,4,5,6\}=E$

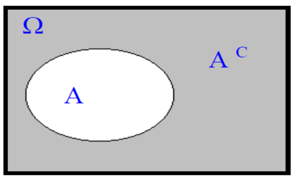
### Sucesos imposible

Se llama sucesos imposible a aquel suceso nuca se cumple y se designa por $\varnothing$ (*conjunto vacío*).

*# Ejemplo.- Un suceso imposible en el lanzamiento de un dado es:*

“No Obtener ni 1, ni 2, ni 3, ni 4, ni 5, ni 6”$=\{\varnothing\}$

### Sucesos contrarios




Se llama suceso contrario de un suceso A. al suceso que se cumple cuando no se cumple A y se representa por $\bar{A}$ o A'.

*# Ejemplo.- Si A es el suceso A = “resultado PAR al lanzar un dado” = A =* $\{2,4,6\}$ *, el suceso contrario es:*

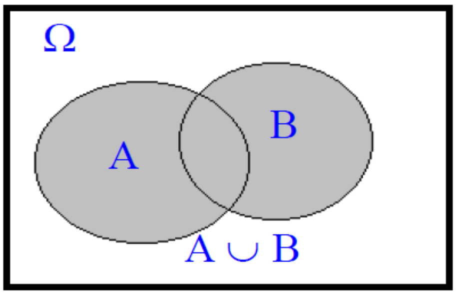
$\bar{A}=\{1,3,5\}$

Hay que observar, que $\varnothing'=E$ y $E'=\varnothing$

## Operaciones con sucesos

Si consideramos un espacio muestral E, podemos definir algunos operaciones con los sucesos de E, como por ejemplo

**Unión de sucesos A y B**

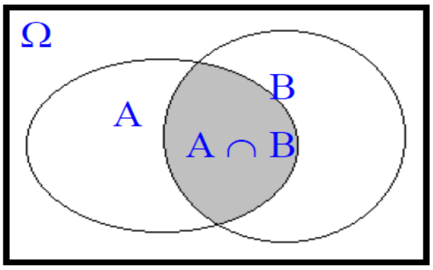



$$A\cup B=\{e\in E: e\in A \quad \text{ó} \quad e\in B\}$$

*# Ejemplo.- Si A es el suceso A = "resultado PAR al lanzar un dado" =* $A=\{2,4,6\}$ *, y B es suceso B = "resultado primo al lanzar un dado" =* $\{2,3,5\}$ *, el suceso* $A\cup B$ *es:*

$$A\cup B=\{2,3,4,5,6\}$$

Intersección de sucesos




$$A\cap B=\{e\in E: e\in A \quad \text{y} \quad e\in B\}$$

*# Ejemplo.- Si A es el suceso A = "resultado PAR al lanzar un dado" = A =* $\{2,4,6\}$ *, y B es suceso B = "resultado primo al lanzar un dado" =* $\{2,3,5\}$ *, el suceso* $A\cap B$ *es:*

$$A\cap B=\{2\}$$

*# Ejemplo.- Sea el experimento que consiste en la extracción de una carta de una baraja española. Si consideramos los sucesos*

*A = "salir oro"*

*B = "salir as"*

*C = "salir rey de copas o as de espadas"*

*Los sucesos,* $A\cup B, A\cup C, B\cup C, A\cap B, A\cap C, B\cap C$ *, se pueden interpretar como*

$A\cup B$ = *" salir oro o as"*

$A\cup C$ = *"salir oro, rey de copas o as de espadas"*

$B\cup C$ = *"salir as o rey de copas"*

$A\cap B$ = *"salir as de oros"*

$A\cap C=\emptyset$

$B\cap C$ = *" salir as de espadas"*

**Sucesos incompatibles**

Dos suceso son incompatibles si su intersección es el suceso nulo o vacío, es decir A y B son dos sucesos incompatibles si y solo si $A \cap B = \emptyset$ . En otro caso, diremos que son compatibles.

*# Ejemplo.- Los sucesos A = "resultado PAR al lanzar un dado" = A =* $\{2,4,6\}$ *, y B = "resultado IMPAR al lanzar un dado" =* $\{1,3,5\}$ *, son sucesos incompatibles, ya que*

$$A \cap B = \emptyset$$

## Sistema completo de sucesos

Dado un espacio muestral E, decimos que un conjunto de n sucesos $A_{1,} A_{2,} A_{3,} \ldots , A_n$ es un **sistema completo de sucesos**, si se verifica

1.- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = E$

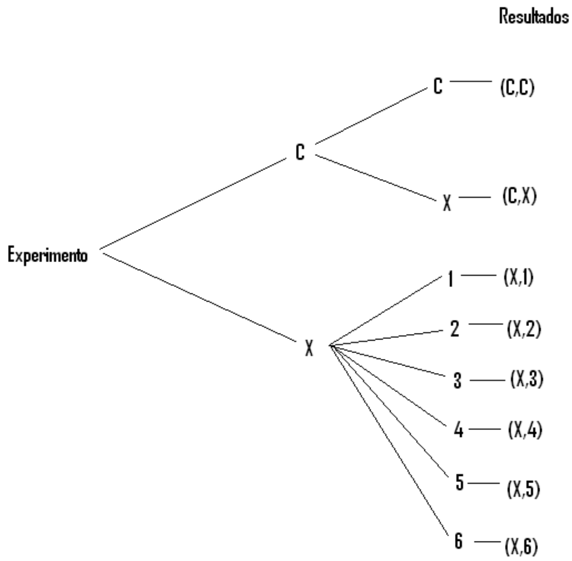
2.- $A_{1,} A_{2,} A_{3,} \ldots , A_n$ son sucesos incompatibles dos a dos.

# Ejemplo.- Sea el experimento de lanzamiento de un dado, cuyo espacio muestral es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ , Los sucesos $A = \{1,2,6\}$ , $B = \{3,4\}$ y $C = \{5\}$ , es un sistema completo de sucesos.

## Experimentos compuestos.

Un experimento compuesto es aquel en el que se puede a su vez dividir en subexperimentos y se puede estudiar como experimento multidimensionales. En caso de experimentos que conste de pocos resultados, para el cálculo de probabilidades, se puede utilizar como herramienta de apoyo los grafos del tipo de árboles, de forma que a partir de lo que suceda en un experimento simple, podemos asignar las probabilidades al experimento siguiente.

*# Ejemplo.- Si consideramos el experimento compuesto de Lanzar una moneda, y si sale cara, volver lanzar la moneda, y si sale cruz, lanzar un dado, el espacio muestral, lo podemos representar mediante el siguiente grafo*




Al espacio muestral asociado se le denomina Espacio compuesto o espacio producto.

*# Ejemplo.- Si consideramos el experimento anterior, el experimento compuesto será:*

$$E = \{(C, C), (C, X), (X, 1), (X, 2), (X, 3), (X, 4), (X, 5), (x, 6)\}$$

## Ley de los grandes números. Idea intuitiva o a "*posteriori*" de probabilidad.

Si consideramos un experimento aleatorio y efectuamos el experimento n veces para ver las veces que se cumple el suceso A (*denominamos muestra aleatoria de tamaño n*), denominamos **frecuencia relativa de A**, el cociente

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$ Donde $n_A$ es el número de veces que ocurre A.

Que si el número de experimento n es pequeño, nos nos aporta una información relevante. Sin embargo, conforme aumentamos el número de n de experimentos, dicho cociente se acerca a la medida de probabilidad de que ocurra el suceso.

Este resultado, es un caso particular de la ley de los grandes números, que podríamos introducir de forma intuitiva como: La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un números, a medida que el número de pruebas crece indefinidamente.

*# Ejemplo.- Si efectuamos un gran número de lanzamientos con una moneda equilibrada, el número de veces que nos ha salido cara se aproximará al número de cruces.*

Cuando se realiza un experimento aleatorio simple de carácter aleatorio, del cual no se conoce probabilidad a "*priori*", se puede efectuar un gran número de observaciones para intentar deducir la probabilidad de que se cumpla. Sin embargo, este tipo de probabilidad (*enunciada por Bernoulli, mediante la Ley de los Grandes Números*) presenta inconvenientes, como por ejemplo, para que dicha medida de probabilidad sea fiable, sería necesario realizar un gran número de experimentos, y cuando el conjunto de sucesos no es un conjunto numerable (*como por ejemplo que suceda algo en un determinado instante*) no es una mediad fiable.

## Definición clásica de probabilidad. Probabilidad a "*priori*".

Si efectuamos un experimento, en el cual todos los sucesos elementales son equiprobables (*tienen la misma probabilidad de salir*), podemos tomar como medida de probabilidad de un suceso el cociente de los casos favorables a dicho suceso dividido entre los casos posibles. Es decir:

Si E es un espacio muestral de sucesos elementales equiprobables y p es la medida de probabilidad de dichos suceso, podemos definir la probabilidad de que se cumpla el suceso A, como

$$p(A) = \frac{\text{nº casos favorables a A}}{\text{nº casos posibles}}$$

A esta probabilidad, se le denomina probabilidad Clásica o de Laplace (*en honor a P. S.*

*Laplace que escribió desde 1774 multitud de artículos de probabilidad*).

*# Ejemplo Si consideramos el experimento de coger una carta de una baraja española, y consideramos el suceso de "obtener un as", si consideramos que todas las cartas tienen la misma probabilidad de salir, y denominamos p a la medida de probabilidad, obtendremos*

$$p(\text{obtener un as})=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$$

Esta medida de probabilidad solamente es útil, cuando los caso sean equiprobables y finitos (*o en todo caso numerables*). Sin embargo en el caso de que no los sucesos elementales no sean equiprobables (*por ejemplo un dado no equilibrado*) , el el conjunto de sucesos sea un subconjunto real, esta medida de probabilidad no nos es útil.

*# Ejemplo.- Si consideramos el experimento de lanzar dos dado, supuestamente equilibrado, la probabilidad de obtener como suma 6, como los posibles resultados favorables son (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) y (5,1), y el número de resultados posibles es* $6^2=36$ *, será*

$$p(\text{obtener como suma un 6 al lanzar dos dados})=\frac{5}{36}$$

## Definición axiomática de Probabilidad.

Se denomina función de probabilidad p de un experimento E, a una función definida sobre el espacio muestral E, tal que cumple los siguientes axiomas

1.- Si A es un suceso de E, $p(A)\geq 0$

2.- LA probabilidad del suceso seguro es 1, es decir $p(E)=1$

3.- Si A y B son sucesos incompatibles del espacio muestral E, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

## Algunas consecuencias de los axiomática de Probabilidad.

Algunas consecuencias o propiedades que podemos destacar de los axiomas de probabilidad

- Si A' es el suceso contrario de A, $p(A')=1-p(A)$
- $p(\emptyset)=0$

*# Ejemplo.- En una imprenta se observa que de cada 100 hojas impresas se estropean 10. Calcular la probabilidad de que una hoja esté mal impresa y también de que esté correctamente impreso. Si denominamos B y M a los sucesos de que una hoja esté bien y mal impresa respectivamente, y p a la función de probabilidad, entonces* $p(B)=\frac{90}{100}$ *y* $p(M)=\frac{10}{100}$

## **Probabilidad de la unión de sucesos**

Si $A_{1,}A_{2,} \ldots , A_n$ son sucesos incompatibles dos a dos de un espacio muestral E, y p es la función de probabilidad, entonces se cumple

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n)$$

Si $A_{1,}A_{2,} \ldots , A_n$ son sucesos cualesquiera de E(*no necesariamente incompatibles*), dos a dos de un espacio muestral E, y p la función de probabilidad, entonces se cumple

$$\begin{aligned} p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= \\ &= p(A_1) + \ldots + p(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - \ldots - p(A_{n-1} \cap A_n) + p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots. + \\ &+ p(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) + \ldots + (-1)^{n-1} p(A_1 \cap A_2 \, intersention \ldots intersention \, A_n) \end{aligned}$$

Para el caso de n = 2, es: $p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_n) - P(A_1 \cap A_2)$

Para el caso de n = 3, es:

$$\begin{aligned} &p(A_1 \cup A_2 \cup A_{3\mathrm{n}}) = \\ &= p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

*# Ejemplo.- Una bolsa contiene n bolas numeradas del 1 al 8. Se realiza un experimento que consiste en extraer una bola de la bolsa y anotar su número.*

*Si consideraremos los siguientes sucesos:*

*A = "salir par"; B = "salir impar"; C = "salir múltiplo de 4".*

*Para calcular las probabilidades de* $A \cup B$ *,* $A \cup C$ *y* $B \cup C$ *, si p es la función de probabilidad, tenemos.*

$A \cap B = \emptyset$ ⇨ *A y B son incompatibles*

$A \cap B \neq \emptyset$ ⇨ *A y B son compatibles,* $p(A \cap B) = \frac{2}{8}$

$B \cap C = \emptyset$ ⇨ *B y C son incompatibles*

*Luego, se cumple:*

$$P(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} = 1$$

$$P(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C) = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} - \frac{2}{8} = ¿\frac{1}{2}$$

$$P(B \cup C) = p(B) + p(C) = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$$

## Probabilidad condicionada.

Se denomina **probabilidad condicionada de un suceso B respecto de un suceso A**, y la denotamos por p(B/A), al cociente siguiente

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}\text{, } si\ p(A)\neq 0$$

Análogamente, la **probabilidad condicionada de un suceso A respecto de un suceso A**, y la denotamos por p(B/A), al cociente siguiente

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}\text{, } si\ p(B)\neq 0$$

## Sucesos dependientes e independientes

1.- Dos sucesos A y B son independientes si $p(B)=p(B/A)$

2.- Dos sucesos A y B son dependientes si $p(B)\neq p(B/A)$

Además, de 1 se deduce que si A y B son independientes, se cumple

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=p(B)\Rightarrow p(A\cap B)=p(A).p(B)$$

*# Ejemplo.- Si extraemos sucesivamente, dos cartas de una baraja española, para calcular la probabilidad de obtener dos reyes, denominamos*

$$R_1=\text{“ sacar rey en la primera extracción ”}$$

$$R_2=\text{“ sacar rey en la segunda extracción ”}$$

*Como las dos cartas se extraen sucesivamente, equivale a extraer la primera y, sin devolverla, realizar una nueva extracción.*

*Utilizando el suceso* $R_1\cap R_2$ *, si p es la función de probabilidad, obtenemos*

$$p(R_1\cap R_2)=p(R_1).p(R_2/R_1)=\frac{4}{40}.\frac{3}{39}=\frac{1}{130}$$

*Sin embargo, si extraemos las dos cartas, pero devolviendo la primera carta una vez extraída, y volviendo a recoger la segunda*

*Utilizando el suceso* $R_1\cap R_2$ *, si p es la función de probabilidad, obtenemos*

$$p(R_1\cap R_2)=p(R_1).p(R_2/R_1)=p(R_1).p(R_2)=\frac{4}{40}.\frac{4}{40}=\frac{1}{100}$$

*Por cumplirse la independencia de los sucesos.*

## Probabilidad compuesto o de la intersección de sucesos

Si A, B son dos sucesos del espacio muestral E, y p es la función la probabilidad, se cumplirá

$$p(A\cap B)=\begin{cases}=p(A).p(B) & \text{si A y B son independientes}\\ =p(A).p(B/A) & \text{si A y B son dependientes}\end{cases}$$

Este resultado se puede generalizar para n sucesos, es decir

Si $A_{1,}A_{2,}\ldots,A_n$ son n sucesos del espacio muestral E, y p es la función la probabilidad, se cumplirá

$$p(A_1\cap A_2\ldots\cap A_n)=\begin{cases}=p(A_1).p(A_2)\ldots p(A_n);\ \text{si } A_1,A_2,\ldots,A_n \text{ son independientes}\\ =p(A_1).p(A_2/A_1)\ldots p(A_n/A_1\cap A_2\ldots\cap A_{n-1});\ \text{si } A_1,A_2,\ldots,A_n \text{ son dependientes}\end{cases}$$

*# Ejemplos.-*

- *Si denominamos el espacio muestral E = {C,X} asociado al lanzamiento de un dado, y p es la función de probabilidad. La probabilidad de obtener cuatro caras en cuatro lanzamientos será:*

$$p(C\cap C\cap C\cap C\cap C)=p(C).p(C).p(C).p(C)=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

- *Si denominamos el espacio muestral E = {10 R, 6 N } asociado a la extracción de bolas de una urna que contiene 10 bolas rojas y 6 bolas negras, y p es la función de probabilidad. La probabilidad de obtener dos bolas negras cuando efectuamos una extracción sin remplazamiento será:*

$$p(N_1\cap N_2)=p(N_1).p(N_2/N_1)=\frac{6}{16}.\frac{5}{16}=\frac{1}{16}$$

## Tabla de contingencias

Las tablas de contingencia utiliza las probabilidades condicionadas para registrar y analizar la relación entre varias variables. Que para el caso de dos variables, y dos sucesos, es de de la forma

| | B | B' | |
|---|---|---|---|
| A | p(A/B) | p(A/B') | p(A) |
| A' | p(A'/B) | p(A'/B') | p(A') |
| | p(B) | p(B') | |

En ocasiones, esta tabla se usa para obtener probabilidades de intersección de sucesos, en vez de probabilidades de sucesos condicionados.

*# Ejemplos.- Si consideramos las variables de sexo E = {H, M} (hombre, mujer) y la variable si la persona es diestra o zurda F = { D, Z}. Si se efectuá este estudio a 1000 personas, de los cuales 520 son hombres y 480 mujeres, se puede utilizar una tabla de contingencia para expresar la relación entre estas dos variables, del siguiente modo:*

| | *H* | *M* |
|---|---|---|
| *D* | $p(D/H)=\frac{430}{520}$ | $p(D/M)=\frac{440}{480}$ |
| *Z* | $p(Z/H)=\frac{90}{520}$ | $p(Z/M)=\frac{40}{480}$ |
| | $p(H)=\frac{520}{1000}$ | $p(D)=\frac{480}{1000}$ |

## Teorema de probabilidad total

Si $A_{1,}A_{2,}A_{3,}\ldots,A_n$ es un sistema completo de sucesos E (*espacio muestral*) tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero y B un suceso cualquiera de E, y p la función de probabilidad tal que para cada $i\in\{1,2,3,\ldots,n\}$ se conoce $p(B/A_i)$ , entonces

$$p(B)=p(A_1).P(B/A_1)+p(A_2).P(B/A_2)+\ldots+p(A_n).P(B/A_n)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i).P(B/A_i)$$

*# Ejemplos.- Si consideramos el ejemplo anterior de personas (hombres y mujeres) diestros y zurdos, y queremos calcular las probabilidades de ser diestro y zurdo, utilizamos el teorema de probabilidad total*

$$p(D)=p(H).p(D/H)+p(M).p(D/M)=\frac{520}{1000}.\frac{430}{520}+\frac{480}{1000}.\frac{440}{480}=\frac{870}{1000}$$

$$p(Z)=p(H).p(Z/H)+p(M).p(Z/M)=\frac{520}{1000}.\frac{90}{520}+\frac{480}{1000}.\frac{40}{480}=\frac{130}{1000}$$

*Y podemos completar la tabla con dichas probabilidades*

| | *H* | *M* | |
|---|---|---|---|
| *D* | $p(D/H)=\frac{430}{520}$ | $p(D/M)=\frac{440}{480}$ | $p(D)=\frac{870}{1000}$ |
| *Z* | $p(Z/H)=\frac{90}{520}$ | $p(Z/M)=\frac{40}{480}$ | $p(Z)=\frac{130}{1000}$ |
| | $p(H)=\frac{520}{1000}$ | $p(D)=\frac{480}{1000}$ | |

## Teorema de Bayes

Si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ es un sistema completo de sucesos E (*espacio muestral*) tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero y B un suceso cualquiera de E, y p la función de probabilidad tal que para cada $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$ se conoce $p(B/A_i)$, entonces para cada suceso $A_i$ será

$$p(A_i/B)=\frac{p(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i).P(B/A_i)}$$

*# Ejemplos.- Si consideramos el ejemplo anterior de personas (hombres y mujeres) diestros y zurdos, y queremos calcular las probabilidad de ser hombre, sabiendo que es zurdo, utilizamos el teorema de Bayes*

$$p(D)=p(H).p(D/H)+p(M).p(D/M)=\frac{520}{1000}.\frac{430}{520}+\frac{480}{1000}.\frac{440}{480}=\frac{870}{1000}$$

$$p(H/Z)=\frac{p(H).p(Z/H)}{p(H).p(Z/H)+p(M).p(Z/M)}=\frac{\frac{520}{1000}.\frac{90}{520}}{\frac{130}{1000}}=\frac{90}{130}$$

*Y podemos completar la tabla con dichas probabilidades*

| | *H* | *M* | |
|---|---|---|---|
| *D* | $p(D/H)=\frac{430}{520}$ | $p(D/M)=\frac{440}{480}$ | $p(D)=\frac{870}{1000}$ |
| *Z* | $p(Z/H)=\frac{90}{520}$ | $p(Z/M)=\frac{40}{480}$ | $p(Z)=\frac{130}{1000}$ |
| | $p(H)=\frac{520}{1000}$ | $p(D)=\frac{480}{1000}$ | |