

Wissensbasierte Experten in einem dynamischen Geometriesystem

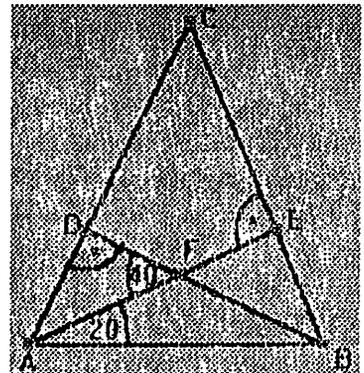
Gerhard Holland, Gießen

Geometry at Secondary Schools gives many opportunities for training skills in solving proof problems, computation problems and construction problems. Nevertheless the general skill of solving geometrical interpolation problems, i.e. problems, in which a start state has to be transformed into a goal state by stepwise applications of operators from a given operator set is underdeveloped at German schools. The integration of knowledge based tutor systems into a dynamic geometry system (DGS) probably could help to remedy this lack. But effective tutor support needs 'experts' which are capable to solve the problems of the above mentioned problem classes by themselves. After an excursion about geometrical interpolation problems, the working of experts is reported on the basis of the geometry system GEOLÓG.

Geometrische Interpolationsprobleme

Die Ergebnisse von TIMSS zeigen, dass der Problemlöseaspekt der Geometrie im Geometrieunterricht weltweit – und leider besonders auch in Deutschland – erheblich vernachlässigt wird. So waren insgesamt nur 35% (in Deutschland sogar nur 20%) der getesteten SchülerInnen in der Lage, die folgende einfache Beweis Aufgabe zu lösen (Klieme, E. & Reiss, K. & Heinze, A. 2000):

Im Dreieck ABC schneiden sich die Höhen AE und BD im Punkt F. $\angle DFA$ misst 40° und $\angle FAB$ misst 20° . Schreiben Sie einen Beweis für die folgende *Behauptung*: Dreieck ABC ist gleichschenkelig.



Aus der Sicht der Kognitionspsychologie handelt es sich bei dieser Beweis Aufgabe um ein typisches *Interpolationsproblem* (Dörner 1976). Ein eindeutig vorgegebenen *Anfangszustand* soll durch Anwenden bekannter *Operatoren* in einen eindeutig definierten *Zielzustand* überführt werden. Dazu sind i. allg. mehr Schritte erforderlich. Da meist mehrere Operatoren anwendbar sind, führen mehrere Wege zum Zielzustand. Im vorliegenden Beweisbeispiel ist der Anfangszustand durch die Voraussetzungen und die zu beweisende Relation definiert. Durch Anwenden bekannter Sätze und/oder Berechnungsformeln – den Operatoren des Interpolationsproblems – wird der Beweis in mehreren Schritten erbracht und damit der Zielzustand erreicht.

Aus mathematischer Sicht handelt es sich bei der TIMSS-Aufgabe um eine typische *Deduktionsaufgabe*: Jeder Schritt ist entweder ein *Berechnungsschritt*, der die Berechnung einer Größe aus

gegebenen Größen erfordert, oder ein *Beweisschritt*, in dem eine Relation aus gegebenen Relationen zu *folgern* ist. Falls der letzte Schritt zur Lösung der Aufgabe ein Berechnungsschritt ist, handelt es sich um eine *Berechnungsaufgabe*, anderenfalls um eine *Beweisaufgabe*. Während aus *mathematischer* Sicht kein wesentlicher Unterschied zwischen Berechnungsaufgaben und Beweisaufgaben besteht, ist der Unterschied aus motivationspsychologischer Sicht erheblich. Da es bei Berechnungsaufgaben nicht – wie bei Beweisaufgaben – lediglich um eine förmale Deduktion einer meist schon akzeptierten Relation geht, sondern um den Zuwachs inhaltlicher Information, lassen sich SchülerInnen wesentlich einfacher zum Lösen von Berechnungsaufgaben motivieren.

Auch geometrische Konstruktionsaufgaben sind Beispiele für Interpolationsprobleme. Hier muss eine gegebene *Anfangskonfiguration* (bei vielen Aufgaben *leer*) durch schrittweises Hinzufügen (weiterer) geometrischer Objekte (Punkte, Geraden, usw.) zu einer *Zielkonfiguration* erweitert werden, für die die vorgegebenen Relationen erfüllt sind (Holland 1994a). Die Operatoren sind in diesem Fall Konstruktionsoperationen, die zu gegebenen Objekten genau ein neues Objekt erzeugen, z.B. die Verbindungsgerade zweier Punkte oder den Schnittpunkt zweier Ortslinien.

Empirische Untersuchungen zu verschiedenen Klassen von Berechnungsproblemen haben gezeigt, dass selbst HauptschülerInnen zum Lösen derartiger Interpolationsprobleme leicht motivierbar sind, falls die Aufgaben in Sequenzen wachsender Schwierigkeit angeboten werden (Holland 1981 und 1983). Das Bewusstwerden der wachsenden Kompetenz und der Anreiz, auch noch komplexere Aufgaben zu lösen, dürften maßgebliche Gründe dafür sein.

Computerunterstützung für Interpolationsprobleme

Klassen mathematischer Interpolationsprobleme eignen sich in besonderer Weise als Gegenstandsbereiche für intelligente tutorielle Systeme (Holland 1993). Am Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Gießen wurde deshalb ein langjähriges Projekt „Aufgabenorientierte tutorielle Systeme für den Mathematikunterricht“ durchgeführt mit dem Ziel, wissensbasierte tutorielle Systeme für geeignete Klassen mathematischer Interpolationsprobleme zu entwickeln und zu erproben (Holland 1992). Ergebnisse waren die beiden tutoriellen Systeme GEOBEWEIS zum Lösen von Beweis- und Berechnungsaufgaben und GEOKON zum Lösen von Konstruktionsaufgaben (Holland 1996) sowie ein System TRAFU für Funktionentransformationsaufgaben (Bettscheider 1996). Die beiden ersteren wurden zusammen mit dem DGS GEOLOG in dem Geometriesystem GEOLOG-WIN zusammengefasst (Holland 1996)¹. Berichte über Unterrichtserfahrungen gibt es zu den Systemen TRAFU (Bettscheider 1996) und GEOBEWEIS (Beckmann 1996 und Lorenzen 1999).

Im Folgenden wird auf die Wirkungsweise der beiden in GEOLOG integrierten wissensbasierten Experten näher eingegangen. Zur Wirkungsweise der Tutoren muss auf andere Veröffentlichungen verwiesen werden (Holland 1994a und 1996).

¹ Ein Weiterentwicklung von GEOLOG-WIN ist das System GEOLOG 2001. In diesem wurden die tutoriellen Systeme in das DGS organisch integriert. Ferner wurde ein Curriculum für den Geometrieunterricht in der Sek I entwickelt und eingebunden, das über eine Lehrerschnittstelle von den Unterrichtenden verändert und ergänzt werden kann.

Der Beweisexperte von GEOLOG

Der Beweisexperte hat die Aufgabe, zu geeigneten geometrischer Beweis- und Berechnungsaufgaben Lösungen zu finden, die Lösungen der SchülerInnen zu analysieren und ihnen in jedem Problemlösezustand auf Anforderung geeignete Hilfen zu geben.

Beispiel einer vom Beweisexperten gelösten Beweisaufgabe

Als Beispiel wählen wir die obige TIMMS-Aufgabe

Planfigur: Siehe oben.

Vorausgesetzte Relationen (in der Notation von Geolog):

AE orth BC,

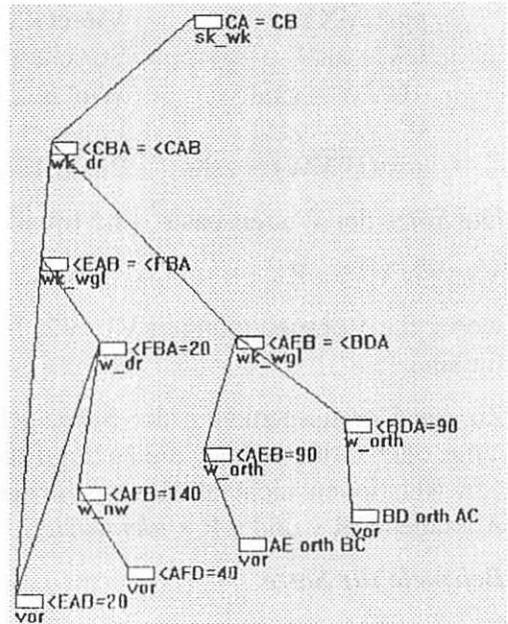
BD orth AC,

$\angle AFD = 40^\circ$,

$\angle EAB = 20^\circ$,

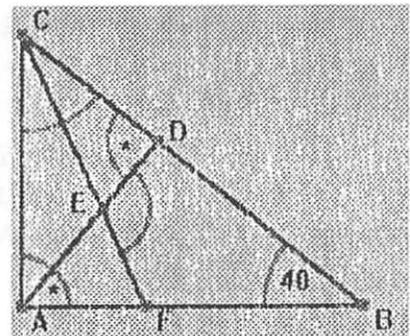
Zu beweisen: $CA = CB$.

Die Lösung des Beweisexperten zeigt der nebenstehende Beweisgraph. In der untersten Ebene repräsentieren die vier Knoten die Voraussetzungen der Aufgabe, der Knoten der obersten Ebene repräsentiert die zu beweisende Behauptung. Die Kürzel unter den Knoten sind Kurzbezeichnungen für die benutzten Sätze.



Beispiel einer vom Beweisexperten gelösten Berechnungsaufgabe

AD orth BC	[vor]	Zurück
$\angle ABC = 40$	[vor]	Drucken
CA orth AB	[vor]	Hilfe
$\angle ACE = \angle DCE$	[vor]	
$\angle ADC=90 \Leftarrow AD \text{ orth } BC$	[w_orth]	
$\angle CAB=90 \Leftarrow CA \text{ orth } AB$	[w_orth]	
$\angle ACB=50 \Leftarrow \angle ABC=40, \angle CAB=90$	[w_dr]	
$\angle DCE=25 \Leftarrow \angle ACB=50, \angle ACE = \angle DCE$	[w_wh]	
$\angle CED=65 \Leftarrow \angle ADC=90, \angle DCE=25$	[w_dr]	
$\angle DEF=115 \Leftarrow \angle CED=65$	[w_nw]	



Zu berechnen: $\angle DEF$

Das Listenfeld zeigt die Lösung, repräsentiert als Liste. In den ersten vier Zeilen sind die Voraussetzungen der Aufgabe formuliert. Die folgenden Schritte sind Deduktionsschritte.

Wissensbasis

Der Beweisexperte von GEOLOG deduziert Folgerungen aus gegebenen Relationen mit Hilfe geometrischer Sätze der Wissensbasis. Dabei werden Relationen zur Inzidenz, Anordnung und Orien-

tierung implizit einer Planfigur entnommen (s.u.). Explizit treten als Voraussetzungen und beim Deduktionsprozess nur Relationen der folgenden Formate auf (Notation von GEOLOG):

UV par XY	Gerade UV ist parallel zur Geraden XY
UV orth XY	Gerade UV ist orthogonal zur Geraden XY
UV = XY	Strecke UV ist kongruent zur Strecke XY
$\angle UVW = \angle XYZ$	Winkel $\angle UVW$ ist kongruent zu Winkel $\angle XYZ$
UVW = XYZ	Dreieck UVW ist kongruent zu Dreieck XYZ
pgrUVXY	Viereck UVXY ist ein Parallelogramm
UV = zahl	Strecke UV hat die Länge <zahl>
$\angle UVW = \text{zahl}$	Winkel $\angle UVW$ hat das Winkelmaß <zahl>
UVW.. = zahl	Polygon UVW.. hat den Flächeninhalt <zahl>
abst(U,VW) = zahl	Punkt U hat zur Geraden (Strecke) VW den Abstand <zahl>

Die **Sätze** der Wissensbasis² sind Implikationen der Gestalt

$$V1, V2, V3 \Rightarrow Z$$

wobei die Voraussetzungen V1, V2, V3 und die Zielrelation Z Relationen der zugelassenen Struktur sind .

Zu den Voraussetzungen der Sätze gehören meist noch implizite Relationen der Inzidenz, Anordnung oder Orientierung, die sich auf die Planfigur beziehen. Ferner wird die Symmetrieeigenschaft von Relationen nicht als Satz expliziert. Ist eine Relation R symmetrisch, so werden die beiden Aussagen $x R y$ und $y R x$ *identifiziert*.

Beispiele für Sätze:

Wechselwinkelsatz

$$AB \text{ par } DC \Rightarrow \angle DAB = \angle ADC.$$

Zusätzliche implizite Relationen: $\angle DAB$ ist Wechselwinkel zu $\angle ADC$.

Kongruenzsatz SWS für Dreiecke

$$UV=XY, \angle UVW=\angle XYZ, VW=YZ \Rightarrow UVW=XYZ.$$

Zusätzliche implizite Relationen: U,V,W und X,Y,Z sind nicht-kollineare Punktetripel.

Additivität des Flächeninhalts für Polygone (Spezialfall)

$$ABCE = X, CDE = Y \Rightarrow ABCDE = X + Y.$$

Zusätzliche implizite Relation: ABCDE ist zerlegt in ABCE und CDE .

Die Rolle der Planfigur

Der Beweisexperte verfügt über ein Modul, mit dem *vor* jeder Deduktion mit Sätzen der Wissensbasis implizite, d.h. für den Benutzer nicht sichtbare Relationen der Planfigur entnommen werden. Dieses gilt für Relationen der Inzidenz, Anordnung und Orientierung. So wird die Anordnung von Punkten auf einer Geraden durch eine Relation *punktreihe* repräsentiert, die auf Punktfolgen zu trifft, deren Elemente kollinear angeordnet sind. Der Planfigur zur obigen Beweisaufgabe werden z.B. die vier Punktfolgen [A,D,C], [C,E,B], [A,F,E] und [D,F,B] entnommen. Der Beweisexperte

² In GEOLOG 2001 wurden die 49 Theoreme von GEOLOG-WIN durch Theoreme zur Flächenberechnung und Dreiecksberechnung (Pythagoras und Trigonometrie) zu insgesamt 75 Sätzen ergänzt.

benutzt die Punktreihen zur Identifikation von Objekten, z.B. der Winkel $\angle DAE$, $\angle CAE$, $\angle DAF$, $\angle CAF$, $\angle EAD$, $\angle EAC$, $\angle FAD$, $\angle FAC$ oder der Geraden AD , AC , DC , DA , CA und CD . (Auch menschliche Problemlöser nehmen eine derartige Identifikation vor, ohne dass dieses thematisiert wird.) – Dass auch bei der Anwendung von Sätzen gewisse Relationen der Planfigur entnommen werden, wurde schon erwähnt.

Das Deduktionsverfahren des Beweisexperten

Zur Lösungsfindung bei Berechnungs- und Beweisaufgaben deduziert der Beweisexperte die Zielrelation aus den explizit gegebenen Voraussetzungen mit Hilfe der zugelassenen Sätze, wobei er die Planfigur benutzt. Dieser Prozess vollzieht sich i.allg. in mehreren Stufen.

- In der *1-ten* Stufe werden alle Folgerungen deduziert, die durch Anwendung eines zugelassenen Satzes aus den Voraussetzungen deduzierbar sind.
- In der *k-ten* Stufe werden alle Folgerungen deduziert, die durch Anwendung eines zugelassenen Satzes aus den Voraussetzungen oder den in den vorhergegangenen Stufen bereits deduzierten Relationen deduzierbar sind. Um Wiederholungen bei der Anwendung einer Regel zu vermeiden, muss (für $k > 1$) wenigstens eine ihrer Voraussetzungen in der $k-1$. Stufe deduziert worden sein.
- Nach jeder erfolgreichen Regelanwendung wird die deduzierte Relation zusammen mit der Deduktionsstufe, dem Namen des angewendeten Satzes und den vorausgesetzten Relationen als Beweisschritt in einer Wissensbasis gespeichert.
- Der Deduktionsprozess bricht nach Beendigung der k -ten Stufe ab, wenn in dieser Stufe entweder die Zielrelation deduziert wurde oder keine weitere Relation. Im ersteren Fall werden alle überflüssigen Deduktionsschritte entfernt. Das Ergebnis ist eine Lösung der Aufgabe mit minimaler Tiefe. Im zweiten Fall ist die Deduktion nicht gelungen.

Wenn der Experte zu einer gegebenen Aufgabe eine Musterlösung liefern soll, wird aus Effizienzgründen ein Deduktionsschritt nicht gespeichert, wenn die deduzierte Relation in einer vorherigen Stufe auf andere Weise bereits deduziert wurde. Soll hingegen der Lösungsschritt einer SchülerIn auf Korrektheit überprüfen werden, so werden auch verschiedene Deduktionen derselben Relation gespeichert, da alle Möglichkeiten der Deduktion der Relation überprüfbar sein müssen.

Grenzen der Leistungsfähigkeit des Beweisexperten

Die Leistungsfähigkeit des Experten wird begrenzt durch dessen *Begriffs-* und *Satzwissen*. Das begriffliche Wissen des Experten wird durch die oben aufgeführten Formate der explizit vorkommenden Relationen repräsentiert. Da der Experte z.B. den Begriff *Quadrat* nicht kennt, muss der Benutzer diesen durch Begriffe definieren, die dem Experten bekannt sind. So lässt sich die Relation *ABCD ist ein Quadrat* ersetzen durch die drei Relationen: *ABCD ist ein Parallelogramm*, $AB \perp CD$ und $AB = CD$.

Da die Inzidenz eines Punktes mit einer Figur nur als *interne* Relation verfügbar ist, kann diese Relation in den Sätzen der Wissensbasis nicht vorkommen. Das betrifft z.B. den folgenden Satz über die Mittelsenkrechte einer Strecke :

Ist g Mittelsenkrechte der Strecke AB und $P \in g$, so gilt $AP = BP$.

Soll dieser Satz vom Experten mit Hilfe von Kongruenzsätzen bewiesen werden, so muss die Mittelsenkrechte von AB als Gerade definiert werden, welche die Strecke AB in deren Mittelpunkt orthogonal schneidet, und die Inzidenz von P mit g muss durch die Planfigur als *implizite* Voraussetzung zum Ausdruck gebracht werden.

Beweis der Richtigkeit einer Konstruktion

Der Zugmodus eines DGS ermöglicht die *empirische* Überprüfung der Relationen einer Konstruktion auf Invarianz. Der Beweisexperte von GEOLOG erlaubt in vielen Fällen zusätzlich den *logischen Beweis* ihrer Allgemeingültigkeit. Zum *Beweis der Richtigkeit* einer mit dem DGS erstellten Konstruktion muss auf logischem Weg nachgewiesen werden, dass alle Relationen, die als Bedingungen der Aufgabe gestellt wurden, von der Konstruktion erfüllt werden. Einige Relationen erweisen sich als *unmittelbare Folgerungen* der Konstruktion. Wird z.B. ein Punkt C als Schnittpunkte zweier Kreise $kr(A,r_1)$ und $kr(B,r_2)$ konstruiert, so gilt auf Grund dieser Konstruktion $AC = r_1$ und $BC = r_2$. Gehören zu den Bedingungen der Aufgabe Relationen, die keine unmittelbaren Folgerungen der Konstruktion sind, so muss für diese ein *Beweis* ihrer Gültigkeit geführt werden. Dazu muss versucht werden, diese Relationen mit Hilfe verfügbarer geometrischer Sätze aus den unmittelbaren Folgerungen der Konstruktion zu deduzieren (Holland 2000).

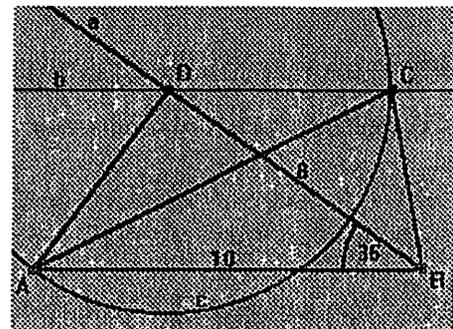
GEOLOG bietet dem Benutzer die Option, zu einer durchgeführten Konstruktion, bei der keine selbstdefinierten Prozeduren und Makros benutzt wurden, die Gültigkeit von Relationen *logisch* zu überprüfen. Nach Eingabe einer Relation werden mit Hilfe eines speziellen Regelsystems zunächst alle unmittelbaren Folgerungen der Konstruktion ermittelt. Gehört die eingegebene Relation zu den unmittelbaren Folgerungen, so wird dieses zusammen mit einer Begründung mitgeteilt. Anderenfalls versucht der Beweisexperte die Relation aus den unmittelbaren Folgerungen zu deduzieren. Gelingt dieses, so wird der Beweis als Graph oder in Zeilenform ausgegeben. Anderenfalls wird dem Benutzer mitgeteilt, dass ein Beweis der Gültigkeit der Relation nicht gefunden wurde, woraus natürlich nicht gefolgert werden darf, dass die Relation nicht allgemeingültig ist.

Beispiel

Es soll ein Trapez ABCD konstruiert werden mit
 $DC \parallel AB$, $\angle DAC = \angle DCA$, $AB = 10$, $BD = 8$, $\angle ABD = 35^\circ$.

Konstruktion mit dem DGS:

A = punkt	Eingabe des Punktes A
B = punkt	Eingabe des Punktes B
s(A,B,10)	Strecke AB erhält die Länge 10
a = hg(h(B,A),-35)	Winkelantragung an h(BA)
D = punkt(a,8)	Länge 8 wird auf a abgetragen
b = par(D,g(A,B))	Parallele durch D zu g(A,B)
c = k(D,A)	Kreis um D durch A
C = b # c	Schnittpunkt von b und c

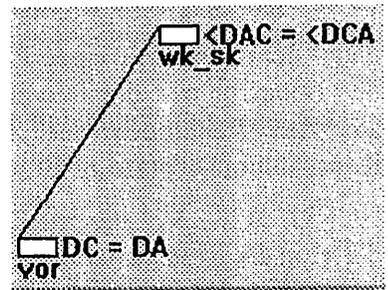


Richtigkeit der Konstruktion:

Unmittelbare Folgerungen der Konstruktion sind:

$\angle DBA = 35$ da D Punkt von $hg(h(B,A), -35)$ ist,
 $AB = 10$ wegen $s(A,B,10)$,
 $BD = 8$ da D Punkt von $punkt(a,8)$ ist,
 $DC \text{ par } AB$ da C Punkt von $par(D,g(A,B))$ ist.

Zum Beweis der Relation $\angle DAC = \angle DCA$ wird diese mit dem Basiswinkelsatz aus der unmittelbaren Folgerung $DC = DA$ deduziert.

**Abschließende Bemerkungen zum Beweisexperten**

Wie die Ausführungen zum Beweisexperten von GEOLOG gezeigt haben, ist dieser keine *Black Box*, die zu eingegebenen Daten (Voraussetzungen und Behauptung) einen Beweis liefert, der auf Methoden der höheren Mathematik beruht und den SchülerInnen keinen Einblick in das Vorgehen liefert. Vielmehr simuliert der Beweisexperte von GEOLOG das Beweisen auf dem im Geometrieunterricht üblichen Niveau. Insbesondere werden Relationen zur Inzidenz, Anordnung und Orientierung – ebenso wie im Geometrieunterricht der Schule – einer Planfigur entnommen. Der Beweisexperte versagt – ebenso wie SchülerInnen – wenn er die Planfigur unzureichend analysiert oder wenn er die zum Beweis erforderlichen Sätze nicht kennt.

Der Konstruktionsexperte von GEOLOG

Aufgabe des Konstruktionsexperten ist es, unter Mithilfe des Beweisexperten, zu einer gegebenen Konstruktionsaufgabe³ ein Konstruktionsprogramm zu finden, welches die vorgegebenen Relationen erfüllt⁴.

Beispiel einer Expertenlösung

Zielkonfiguration:

$BD = DC$, $AD = 7$, $BC = 8$, $\angle CAB = 50^\circ$

Lösung des Konstruktionsexperten:

$B = \text{punkt}$ (M1)

$a = kr(B,8)$

$C = \text{punktauf}(a)$ (M2)

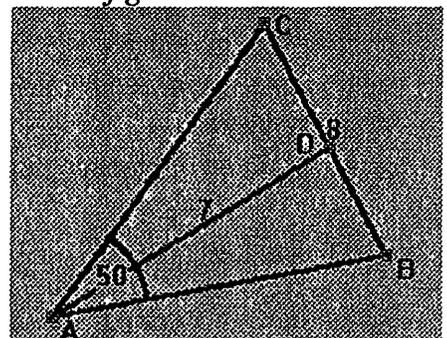
$D = mp(C,B)$ (M3)

$b = kr(D,7)$

$c = \text{fasskr}(B,C,50)$

$A = b\#c$ (M5)

Planfigur:



³ Die Anfangskonfiguration ist stets leer, d.h. vor Beginn der Konstruktion sind keine Punkte gegeben.

⁴ Eine umfassende Analyse zur maschinellen Lösung von Konstruktionsaufgaben findet sich in Holland 1994b.

Erzeugung von Plänen

Nach dem Zeichnen einer Planfigur und der Eingabe der Relationen der Zielkonfiguration durch den Benutzer tritt der Beweisexperte in Aktion, um mit den verfügbaren Sätzen alle Folgerungen aus den Relationen der Zielkonfiguration zu deduzieren. Diese Wissensbasis benutzt der Konstruktionsexperte zu Erzeugung von *Plänen*.

Ist $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ die zur Zielkonfiguration einer Aufgabe gehörende Punktmenge, so durchläuft der Konstruktionsexperte die $k!$ zugehörigen k -Tupel. Zu jedem Tupel erzeugt der Konstruktionsexperte ein Konstruktionsprogramm, in dem die k Punkte in der durch das Tupel vorgegebenen Reihenfolge eingegeben oder konstruiert werden. Zur Erzeugung eines Punktes durchläuft der Konstruktionsexperte fünf verfügbare Methoden M_1, M_2, \dots, M_5 (s.u.). Die erste anwendbare Methode wendet er zur Erzeugung des Punktes an. Eine der fünf Methoden ist stets anwendbar, so dass die Konstruktion nie scheitert.

Da es nur bei wenigen Konstruktionsaufgaben auf die Reihenfolge, in der die k Punkte erzeugt werden, *nicht* ankommt, ist i.allg. nicht jedes der $k!$ erzeugten Programme auch eine *Lösung* der Aufgabe. Aus diesem Grund werden die Konstruktionsprogramme *Pläne* genannt.

Der Prozess kann abgebrochen werden, falls sich ein Plan als *Lösung* herausstellt. Für das obige Beispiel trifft dieses erstmals für den 10. Plan (der insgesamt 24 Pläne) zu:

1. Plan	2. Plan	10. Plan (Lösung)
A = punkt (M1)	A = punkt (M1)	B = punkt (M1)
B = punkt (M1)	B = punkt (M1)	a = kr(B,8) (M2)
a = hg(h(A,B),50) (M5)	a = kr(A,7) (M5)	C = punktauf(a) (M3)
b = kr(B,8) (M3)	b = kr(B,4) (M4)	D = mp(C,B) (M5)
C = a#b	D = a#b	b = kr(D,7)
D = mp(C,B)	C = ps(D,B)	c = fasskr(B,C,50)
		A = b#c

Ob ein Plan eine Lösung ist oder nicht, hängt von dem *Freiheitsgrad* des Planes ab. Für den Freiheitsgrad FG eines Planes gilt: $FG = N_1 * 2 + N_2$. Hier sind N_1 und N_2 die Häufigkeiten der im Plan angewendeten Methoden M_1 und M_2 . Die erste 9 Pläne haben jeweils den Freiheitsgrad 4, der 10. Plan hat den Freiheitsgrad 3. Da dieser Freiheitsgrad der kleinste Freiheitsgrad ist, den ein Plan haben kann, handelt es sich bei diesem Plan um eine Lösung der Aufgabe. Allgemein gilt:

- Falls es Lösungen der Aufgabe unter den Plänen gibt, so sind deren Freiheitsgrade minimal (und somit gleich).
- Der Freiheitsgrad eines Plans ist stets größer oder gleich drei.
- Pläne mit dem Freiheitsgrad 3 sind Lösungen der Aufgabe. Nur in diesem Fall kann der Konstruktionsexperte ohne Mithilfe des Benutzers entscheiden, dass der Plan eine Lösung ist.
- Falls es keinen Plan mit dem Freiheitsgrad 3 gibt, muss für einen der Pläne mit minimalem Freiheitsgrad geprüft werden (Zugmodus, Beweis der Richtigkeit), ob es sich um eine Lösung handelt.

Wissensbasis

Die Wissensbasis des Konstruktionsexperten enthält *Methoden* und *Ortslinien-Regeln*. Hinzu kommt die temporäre Basis REL der vom Beweisexperten deduzierten Relationen (s.o.).

Methoden

Methoden dienen der Erzeugung von Punkten einer Konstruktion. Im folgenden bezeichnet: GEGEBEN die Menge der bereits erzeugten Punkte, GESUCHT die Menge der noch zu erzeugenden Punkte, REL die Menge der aus den Relationen der Zielkonfiguration folgenden Relationen.

- <M1> *Freie Positionierung eines Punktes*
Wenn $P \in \text{GESUCHT}$ und es gibt keine Ortslinie von P bezüglich GEGEBEN, dann positioniere P beliebig.
- <M2> *Positionierung eines Punktes auf einer Ortslinie*
Wenn $P \in \text{GESUCHT}$ und f ist einzige Ortslinien von P bezüglich GEGEBEN, dann positioniere P beliebig auf f.
- <M3> *Punkt als Mittelpunkt einer Strecke*
Wenn $P \in \text{GESUCHT}$ und $\{U, V\} \subseteq \text{GEGEBEN}$ und $PU = PV \in \text{REL}$ dann erzeuge P als Mittelpunkt der Strecke UV.
- <M4> *Punkt als Bildpunkt bei einer Punktspiegelung*
Wenn $P \in \text{GESUCHT}$ und $\{U, V\} \subseteq \text{GEGEBEN}$ und $UV = PV \in \text{REL}$ dann erzeuge P als Bildpunkt von U bei der Punktspiegelung an V.
- <M5> *Ortslinienmethode*
Wenn $P \in \text{GESUCHT}$ und f ist Ortslinie von P bezüglich GEGEBEN und g ist Ortslinie von P bezüglich GEGEBEN und f und g schneiden sich, dann erzeuge P als Schnittpunkt von f und g.

Ortslinien

Welche der Methoden im jeweiligen Problemlösezustand anwendbar ist, hängt von den verfügbaren Ortslinien ab.

Beispiele für Ortslinienregeln:

- <O1> *Parallele durch einen Punkt zu einer Geraden als Ortslinie*
 $\text{parallele}(C, g(A, B))$ ist Ort von P bezüglich GEGEBEN, wenn $A, B, C \in \text{GEGEBEN}$ und $PC \parallel AB \in \text{REL}$
- <O2> *Kreis mit dem Mittelpunkt M und Radius r als Ortslinie*
 $\text{kreis}(M, r)$ ist Ort von P bezüglich GEGEBEN, wenn $M \in \text{GEGEBEN}$ und $PM = r \in \text{REL}$.
- <O3> *Fasskreisbogen als Ortslinie*
 $\text{fasskreis}(A, B, \gamma)$ ist Ort von P bezüglich GEGEBEN, wenn $A, B \in \text{GEGEBEN}$ und $\angle APB = \gamma \in \text{REL}$.

Grenzen der Leistungsfähigkeit des Konstruktionsexperten

Die Leistungsfähigkeit des Konstruktionsexperten wird primär bestimmt durch die verfügbaren Methoden zur Konstruktion von Punkten. Die Anwendbarkeit der Methoden hängt wiederum ab von den verfügbaren Ortslinienregeln. Schließlich hängt die Anwendbarkeit der Ortslinienregeln von den Relationen ab, die der Beweisexperte zuvor aus den Relationen der Zielkonfiguration deduziert hat – und somit von der Wissensbasis des Beweisexperten. Die meisten der heute im Geometrieunterricht üblichen Konstruktionsaufgaben zur Konstruktion von Dreiecken und Vierecken werden mit den angegebenen Methoden gelöst.

Literatur

- Beckmann, A. (1996). Kongruenzgeometrisches Beweisen am Computer. Praxis der Mathematik, 1996/6, Aulis Verlag Köln.
- Bettscheider, U. (1996). Ein Problemorientiertes Tutorielles System für Funktionentransformation-
aufgaben mit maschinellem Aufgabenauswahlverfahren. Dissertation, Gießen 1996.
- Dörner, D. (1976) Problemlösen als Informationsverarbeitung. Kohlhammer, Berlin.
- Holland, G. (1981). Bericht über einen Unterrichtsversuch zum Lösen geometrischer Berechnungs-
probleme. Hessisches Institut für Lehrerfortbildung Heft 81, Reinhardswaldschule, Fulda.
- Holland, G. (1983). Working backwards in solving geometric calculation problems. In: Proceed-
ings of the 7-th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Israel.
- Holland, G. (1992). Aufgabenorientierte tutorielle Systeme für den Mathematikunterricht. In
U. Glowalla & E. Schoop (Eds.), Hypertext und Multimedia. Neue Wege in der computerunterstütz-
ten Aus- und Weiterbildung. Berlin, Springer.
- Holland, G. (1993). Tutorial Systems. In: R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann
(Eds.), Mathematics Didactics as a Scientific Discipline. Kluwer/Reidel.
- Holland, G. (1994a). Aufgabenorientierte tutorielle Systeme für den Geometrieunterricht. In:
H. Hischer (Hrsg.), Mathematikunterricht und Computer - neue Ziele oder neue Wege? Franzenbe-
cker, Hildesheim.
- Holland, G. (1994b). Zur maschinellen Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben. In:
I. Weidig, G. Pickert (Hrsg.), Mathematik erfahren und lehren. Klett, Stuttgart 1994.
- Holland, G. (1996). GEOLOG-WIN, Konstruieren, Berechnen, Beweisen, Problemlösen mit dem
Computer. Dümmler, Bonn.
- Holland, G. (2000). Zum Beweis der Richtigkeit geometrischer Konstruktionen. In: Herget & Wei-
gand & Weth (Hrsg.), Standardthemen des Mathematikunterrichts in moderner Sicht. Franzenbe-
cker, Hildesheim.
- Klieme, E. & Reiss, K. & Heinze, A. (2000), Geometrische Kompetenz, Eine Untersuchung zu
TIMSS-Aufgaben. Preprint Univ. Oldenburg.
- Lorenzen, H. (1999). Kongruenzgeometrische Beweisübungen mit der Computersoftware GEO-
BEWEIS-Erfahrungen mit einer Unterrichtskonzeption in einer 7. Klasse.

DGS-unterstütztes Vermuten und Beweisen

Hermann Kautschitsch, Klagenfurt

Abstract: Dragging is an integral part of a dynamic geometry software (DGS). It is shown how functional thinking can be supported by DGS and with both the process of conjecturing. But apart from dragging with DGS, also rearranging, the dynamization of disassembling and assembling, is possible. This feature supports modular thinking, which makes possible visual but still valid proofs. Such proofs are nothing else than always practicable actions with figures and well-known geometric constellations and one does not run into danger to determine only invariants by dragging without asking for the reasons and looking for arguments. So DGS even can initiate and support the process of proving.

1 Einleitung

Viele Untersuchungen zeigen, daß im traditionellen Mathematikunterricht Inhalte fehlen, an denen sich Prozesse des heuristischen Denkens und der Entwicklung höherer formaler Qualifikationen wie Vermuten, Beweisen und Verallgemeinern entwickeln können. Auch der Computereinsatz hat die bisherigen Schwerpunktsetzungen und die dadurch hervorgerufenen Defizite nur verstärkt, weil die intellektuelle Anforderungsstrukturen gleichgeblieben sind. Auch die Unterrichtsform hat sich trotz Computereinsatz nicht verändert, nach wie vor wird fertige Mathematik in algorithmischer oder deduzierender Form präsentiert. Der bloße Einsatz neuer Medien, auch von DGS, bewirkt noch nichts, erst im Zusammenwirken mit anderen Unterrichtsformen kann sich eine Änderung der intellektuellen Anforderungsstruktur ergeben. Es soll nun gezeigt werden, wie dies durch eine DGS-unterstützte experimentelle Unterrichtsform geschehen kann und wie dadurch das Risiko für das Nichtfinden von Vermutungen und Begründungen reduziert wird. Zur Risikominderung werden "Fluchtwege" in vertraute Bereiche und leicht erlernbare Strategien angegeben. Als vertraute Bereiche dienen Abhängigkeitsgraphen und Bildhandlungen, als Strategien die Suche nach Invarianten und das Anpassen von Figuren.

Die "Funktionsprache" ist ein so mächtiger Kalkül, daß sonst auftretende Schwierigkeiten verdeckt werden. Funktionsgraphen lenken den Blick "automatisch" auf das Ganze, in ihnen ist eine globale Information verpackt. Die Flucht in den Funktionskalkül mag vielleicht ungeometrisch wirken, sie verkleinert jedoch das Risiko, daß der Schüler nichts entdeckt.

Ebenso ist die Suche nach Invarianten eine mit dem Computer leicht realisierbare und für das Finden von Vermutungen (Invarianz von Eigenschaften) und Begründungen (Invarianz von Handlungen) vor allem für Schüler eine nützliche Strategie. Als besonders hilfreich erweist sich die Beschränkung auf wenige, fundamentale "Grundkonstellationen", mit deren Hilfe Begründungen gefunden werden können. Dabei spielen die Tätigkeiten Zerlegen, Umordnen und Anpassen eine große Rolle.

Die hier vorgestellten Konzepte und Vorgehensweise wurde in einem einwöchigen Talentecamp der Universität Klagenfurt im September 2000 an 15-jährigen Schülern ausprobiert. Nach einer eintägigen Einschulungsphase in das Programmpaket THALES und der Erarbeitung eines "Optischen Lexikons" konnten von den Schülern die Standardsätze, aber auch einige exotische Sätze (Satz von Menelaos, Satz von Schoten) vermutet und in Form von bildunterstützten Handlungsanweisungen begründet werden. Das Optische Lexikon war dabei eine Sammlung von wenigen Grundfiguren (Strahlensatzfigur, Ähnliche Dreiecke, Umfangswinkelfigur, ...) und einigen Strategien (Suche nach Hilfslinien, gleiche Größen erkennen, Interpretationen von Abhängigkeitsgraphen, ...) Eine bedeutende Rolle spielten Arbeitsblätter, die ein strukturiertes Denken und Handeln ermöglichten.

2 Computerunterstützte (computeraided) experimentelle Mathematik (CAEM)

Wie schon erwähnt, hat der Computereinsatz die bisherigen Schwerpunktsetzungen im Mathematikunterricht und die dadurch hervorgerufenen Defizite nur verstärkt. Nach wie vor sind die Inhalte gleichgeblieben, in der Geometrie überwiegen Konstruktions- und Rechenverfahren, wie auch Rechenbeweise und nach wie vor wird eine fertige Mathematik in deduzierender oder nur in algorithmischer Form präsentiert. Trotz Computereinsatz ändert sich dadurch die intellektuelle Anforderungsstruktur nicht. Um dies zu erreichen, muß man bereit sein, von der deduktiven Strenge zumindest manchmal abzusehen und die induktive Ungenauigkeit in Kauf zu nehmen, um ein produktives, schöpferisches Arbeiten zu ermöglichen und damit selbständig neue Erkenntnisse und ein über das Formale hinausgehende Verständnis (also Einsicht) zu gewinnen.

Nun ergibt sich gerade in der Geometrie ein großes Übungsfeld zur Erlangung der oben erwähnten höheren Qualifikationen, weil der Schüler einen großen Erfahrungsschatz von Raum, aber auch an Bewegungen (räumliche Veränderungen) hat. Diese Bewegungserfahrung kommt dem **kinematisch-funktionalen Denken** (Strunz § 41) des vor allem jugendlichen Schülers sehr entgegen. Die deduzierende und axiomatisierende Unterrichtsmethode favorisiert dagegen das statische Denken, das wiederum auf Kosten einer größeren Exaktifizierung viele vorhandene Erfahrungen zuschüttet.

Die Unterrichtsform CAEM stellt durch die Betonung des operativen Prinzips in der "filmischen" Ausprägung von Wittmann (Wittmann 1987) eine Verbindung von induktiven und entdeckenden Lernen dar. Das Adjektiv "experimentell" soll dabei folgendes signalisieren:

- Betonung einer planmäßigen (gelenkten) Selbsttätigkeit mit Unterstützung durch Arbeitsblätter)

- Bereitstellung von Erfahrungs-, Variations- und Umordnungsmöglichkeiten, sowie von Wiederholungsmöglichkeiten von Experimenten
- Einbeziehung von naturwissenschaftlichen Methoden (Messen, Rechnen, Erzeugen und Interpretationen von Abhängigkeitsgraphen, Rückführung auf bekannte Konstellationen).

Die Computerunterstützung ermöglicht viele Erfahrungen innerhalb kurzer Zeit, sowie eine leichte Verwertbarkeit und Wiederholbarkeit von Experimenten, sodaß das Zeitargument gegen das entdeckende Lernen etwas gemildert wird. Der Hauptvorteil der Computerunterstützung liegt jedoch einerseits in der Förderung des funktionalen, andererseits des modularen Denkens. Zusammen mit einer Invariantensuche wird eine **objekt- bzw. eigenschaftsbezogenes operatives Prinzip** realisiert. Bei der ersten Form sucht man nach möglichen und interessanten Operationen an gegebenen Objekten (Konstellationen) und studiert, welche Auswirkungen sie besitzen. Bei der zweiten Form geht man von einer Eigenschaft von oder Beziehung zwischen Objekten aus und sucht nach Operationen (Handlungen), die diese invariant lassen. Entscheidende Rolle kommt dabei dem funktionalen Denken zu, das durch DGS sich nicht nur auf einem Denken in und mit Funktionen beschränken muß, sondern infolge der möglichen Beweglichkeit von Figuren auch auf ein Denken mit Veränderungen von Bildern und Mustern erweitert werden kann und soll. Mit dieser Möglichkeit kann man nach bekannten Konstellationen suchen, für die man schon Beziehungen kennt („.....“Figur, wie gehabt“). Hier spielt das modulare Denken eine große Rolle, das eine große Ähnlichkeit mit der Arbeit am Computer besitzt, der ja auch stets auf vorgefertigte Module zurückgreift. Gerade bei Verwendung einer DGS wird durch den Makromodus immer wieder auf bekannte Konstruktionen zurückgegriffen, ebenso beim Speichern und schnellen Abrufen von bekannten Konstellationen, man denkt in und mit bekannten Bildern und Mustern (z.B. mit jenen des "Optischen Lexikons").

3 Beschreibung der CAEM

Im folgenden soll gezeigt werden, wie durch CAEM vor allem das Risiko für das Nichtfinden von Vermutungen und Begründungen reduziert werden kann. Die Risikominderung scheint mir wesentlich zu sein, zeigen doch z.B. die Untersuchung von Hentschel und Pruzina an Hand graphikfähiger Taschenrechner (GTR), daß eine experimentelle Unterrichtsform nicht automatisch erfolgreich ist. DGS kann jedoch wesentlich mehr Optionen anbieten als die GTR. Die folgenden Beispiele wurden mit THALES erstellt, eine Geometriesoftware, die gerade für eine experimentelle Unterrichtsform konzipiert wurde, mit der nicht nur begabte Schüler erfolgreich sein können (siehe Kadunz/Kautschitsch (1997)). Um das Risiko eines Mißerfolges zu mindern, müssen dem Schüler Auswege ("Fluchtwege") in vertraute Bereiche und erlernbare Strategien angeboten werden. Bei der zu besprechenden CAEM mit THALES sind Zahlen, Funktionsgraphen, Grundfiguren eines Optischen Lexikons und deren Veränderungen die vertrauten Bereiche. Hauptstrategien sind systematisches Probieren, Variieren, Anpassen und Rückführen auf bekannte Konstellationen. Je nachdem, in welchem vertrauten Bereich gearbeitet wird, kann man unterscheiden eine

1. **Funktionsunterstützte CAEM:** Aufbau von Abhängigkeitsgraphen aus Messungen und Rechnungen. Strategie: Erzeugen und Interpretation bekannter Funktionsgraphen

mittels Messungen und Rechnungen - Suche nach invarianten Eigenschaften → funktionales Denken.

2. **Bildunterstützte CAEM:** Aufbau und Zerlegen von Bildern, Auspflasterungen und Anpassungen. Strategie: Erzeugen und Interpretation bekannter Konstellationen aus geometrischen Grundfiguren mittels Zerlegen, Umordnen und Anpassen - Suche nach invarianten Handlungen → modulares Denken.

Der Umgang mit Funktionen und deren Graphen ist allerdings keine so vertraute Sache, er sollte im Curriculum deutlich vorgezogen werden. Die Interpretation von Funktionsgraphen kann aber ebenfalls mit DGS bildunterstützt geschult werden. Die mit DGS mögliche **simultane Darstellung** von Veränderungen der Variablen (dargestellt als Strecken) und des Aufbaus des Abhängigkeitsgraphen vermittelt ein zusammengehöriges Verständnis von Graph und Konstanz der Summe, Differenz bzw. des Produktes und Quotienten. Insgesamt kommt man in der Elementargeometrie erfahrungsgemäß mit folgenden Graphen aus (Abb. 1):

$y + y = \text{konstant}$	Gerade mit Steigung $k = -1$
$x - y = \text{konstant}$	Gerade mit positiver Steigung $k = +1$
$x \cdot y = \text{konstant}$	Hyperbel
$\frac{y}{x} = \text{konstant}$	Gerade durch den Ursprung
$y = x^2 + c$	Parabel

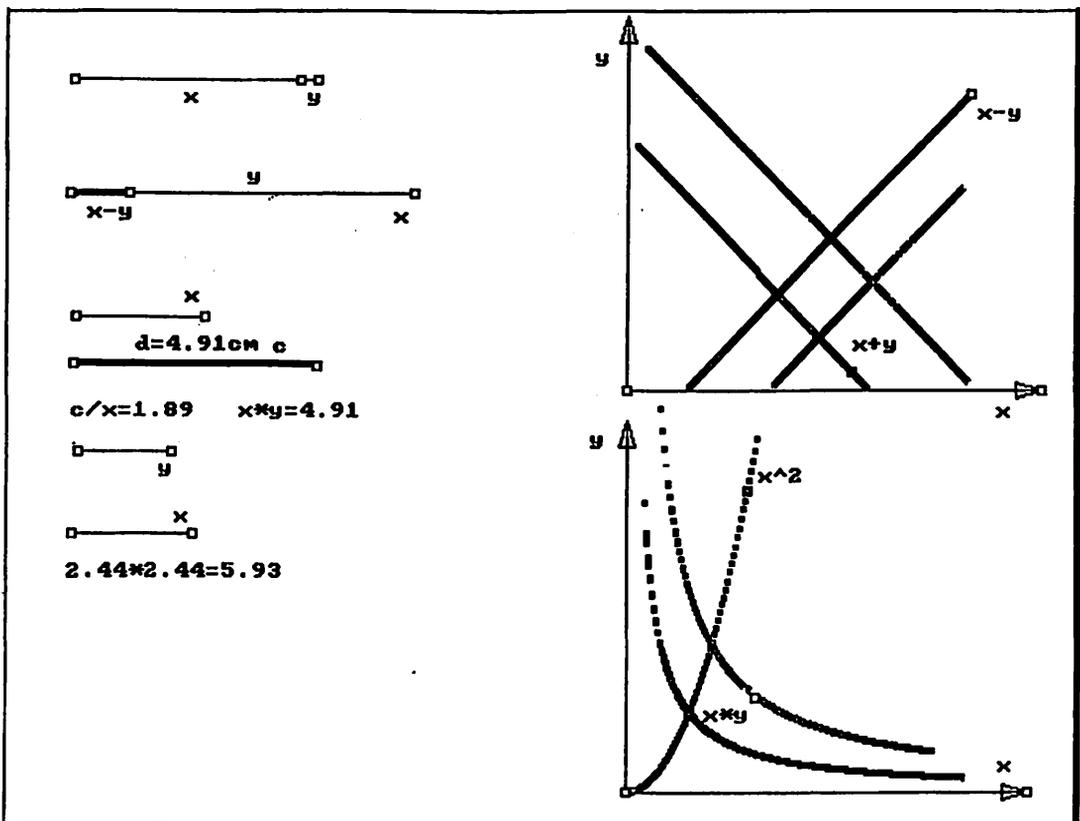


Abb. 1

Für die Vermutungsfindung hat sich beim Talentecamp darüber hinaus das Ablesen der Konstanten aus den Abhängigkeitsgraphen als besonders effizient erwiesen (Abb. 2):

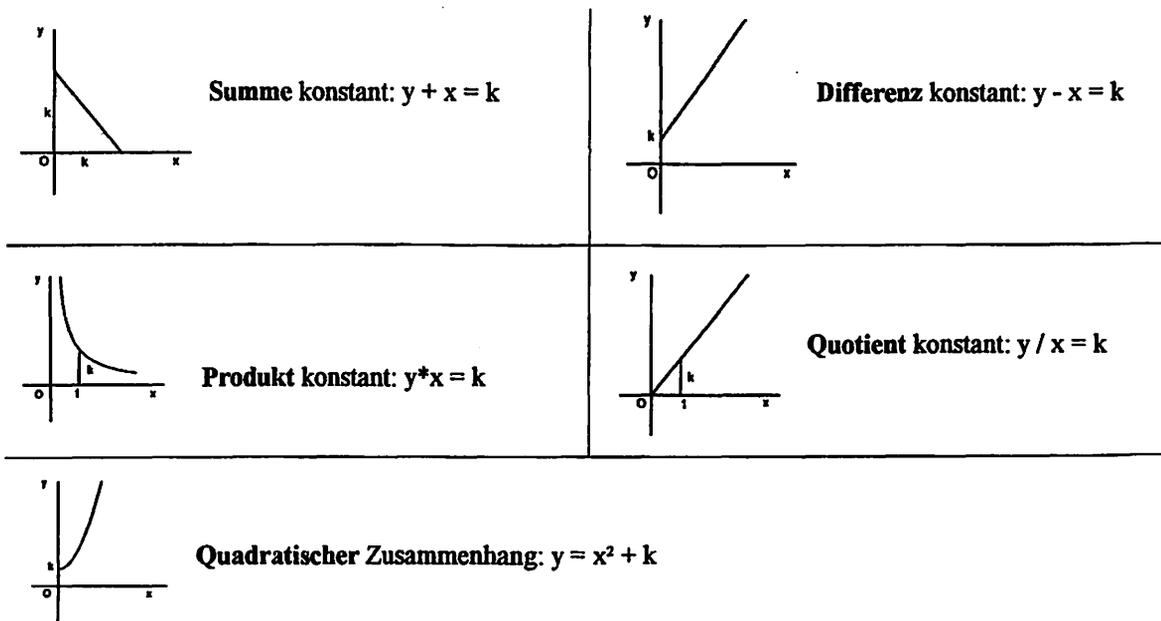


Abb. 2

4 Funktional-operative Behandlung des Kathetensatzes

Das Ausweichen in eine funktionsunterstützte Umgebung ist vor allem dann wirksam, wenn Zusammenhänge nicht **direkt gesehen** werden können. Dies ist gerade bei tiefliegenden Sätzen, wie z.B. beim Satz von Pythagoras, Höhensatz oder Kathetensatz der Fall. Es ist schon immer ein schwieriges didaktisches Problem gewesen, die Aufmerksamkeit auf die Quadrate zu lenken. Nicht immer ergeben sich bei Experimenten sofort bekannte Abhängigkeitsgraphen. In der Naturwissenschaft ist dann folgende Strategie üblich: Ist zwischen zwei Variablen x und y kein "einfacher" Zusammenhang feststellbar, versucht man es mit y^2 und x , $\ln y$ und x usw., um einen "bekannteren" Abhängigkeitsgraphen zu erhalten. Auch diese Strategie lässt sich effizient auf das computerunterstützte operative Prinzip im Geometrieunterricht anwenden.

Eine CAEM könnte folgende Stufen durchlaufen:

1. Stufe: Vertrautmachen mit der Situation

Was gibt es? Was kann verändert werden?

Festhalten eines Bestimmungsstückes, Variation der übrigen.

2. Stufe: Sammeln von Daten

Wie groß ist etwas? Messungen und Rechnungen liefern Zahlen.

Erste qualitative Feststellungen.

Sind noch keine Invarianten in Sicht, versucht man es mit Abhängigkeitsgraphen.

3. Stufe: Einblenden und Interpretation von Funktionsgraphen - Vermutungsfindung

Systematische Abänderung einzelner Bedingungen. Zusammenfassung der Änderungen in

Abhängigkeitsgraphen durch "kontinuierliches" Variieren im Ortslinienmodus, Sammeln von mehreren Abhängigkeitsgraphen.

1. Experiment: Variationen von a und b bei konstantem c, h, p, q ergeben keinen "bekannten" Graphen (Abb. 3). Die "Fastparabelgestalt" der Abhängigkeit von a gegen p läßt eine bekannte Abhängigkeit eventuell von a^2 und p vermuten, tatsächlich erhält man eine Gerade durch den Ursprung, wenn man a^2 "gegen" p aufträgt, d.h., $a^2/p = \text{konstant} = k \Leftrightarrow a^2 = k \cdot p$ (Abb. 4).

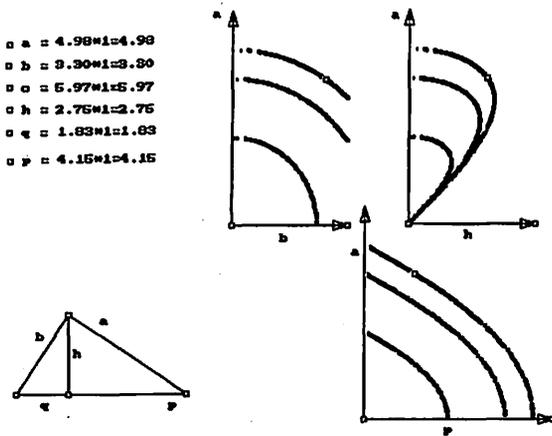


Abb. 3

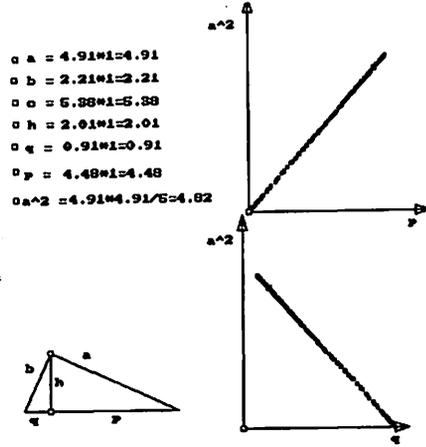


Abb. 4

2. Experiment: Bestimmung der Konstanten k in $a^2 = k \cdot p$.

Aus der Einschulung in die Interpretation von Abhängigkeitsgraphen weiß der Schüler auch, wie die Konstanten zu bestimmen sind. In unserem Fall des konstanten Quotienten ergibt sich k als Funktionswert an der Stelle $p = 1$, dieser ergibt sich als Schnitt mit der Ortslinienkurve. Mit THALES kann man k auch ausschneiden und mit dem gegebenen Dreieck vergleichen. Man beobachtet die Übereinstimmung von k und c , Messungen bestätigen den Verdacht, Ziehen am Dreieck lassen die Beobachtungen unverändert, also gilt vermutlich $a^2 = c \cdot p$ (Abb. 5).

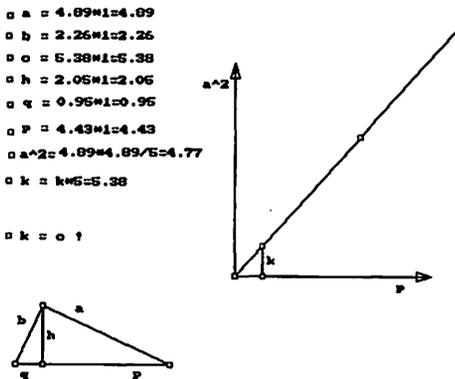


Abb. 5

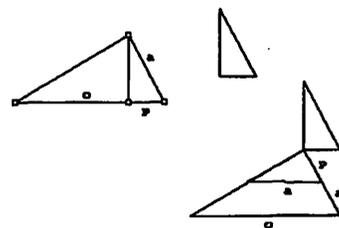


Abb. 6

4. Stufe: Begründen

Warum ist a^2/p invariant? Kann man die aktuelle Konstellation auf bekannte Konstellationen zurückführen? Etwa durch Einzeichnen von Hilfslinien, Sehen von gemeinsamen Strecken, Erkennen von ähnlichen Dreiecken?

3. Experiment: Mit THALES können Teile aus einer Figur angeschnitten und über die Zeichenebene so bewegt werden, daß sie mit anderen Linien zur Deckung gebracht werden können (Anpassen!). In unserem Fall ergibt sich die in Abb. 6 gezeigte Konstellation von ähnlichen Dreiecken, aus der die Beziehung $c : a = a : p$ ablesbar ist.

Die Beobachtung des Passens kann durch die Winkelgleichheit erklärt werden, die Bildhandlung ist daher stets durchführbar, also genügt es, sie an einer Figur durchzuführen.

5 Beweisen im Mathematikunterricht

5.1 Erfolgreiches Vermuten

Die im vorhergehenden Beispiel demonstrierte Vorgehensweise wurde, wie schon erwähnt, im Rahmen eines Talentecamps an der Universität Klagenfurt ausprobiert und an vielen anderen Beispielen erfolgreich wiederholt. Kommentar von Teilnehmern: "Highlight - die eigenständige Vermutungs- und Beweisfindung anstatt des sturen Abschreibens von der Tafel in der Schule". Die Erfahrungen zeigen, daß Beweisen in der Schule nicht durch

- häufiges Vorführen und Wiederholen fertiger Beweise
- sofortiges und zielgerichtetes Hinsteuern zum strengen Beweis
- Erschütterung des Vertrauens in intuitive Vorstellungen und in den Computer

erfolgen sollte, sondern durch selbständige Beweisversuche. Dabei soll besonderer Wert gelegt werden auf:

- Betonung der selbständigen Vermutungsphase
- Vorgabe von einigen wenigen anschaulichen Evidenzen und fundamentalen Konstellationen (→ Optisches Lexikon)
- Vorgabe von wenigen fundamentalen Strategien
- Zeit geben für Fehlversuche und das Mitschreiben am Arbeitsblatt

Es zeigte sich, daß eine selbständig gewonnene Vermutung leichter auf die Frage "Warum gilt die offensichtliche (verblüffende) Invarianz?" und auf den Wunsch "ich möchte es selbst wissen und nicht nur vom Computer (Lehrer) belehrt werden" führt. Es geht den Schülern also um die logische Einordnung in die bisherigen Sätze und um die Überwindung von Autoritäten und nicht so sehr um eine Erkenntnissicherung (obwohl diese erst durch einen Beweis gegeben ist).

Nun ist ein (direkter) Beweis eine Ableitung einer Aussage aus anderen durch Anwendung der "üblichen" logischen Schlußregeln: $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A$.

Dabei hängt die Korrektheit des Beweises nicht davon ab, ob die Aussagen A_i schon bewiesen sind. Damit ist (unter anderem) ein streng axiomatisch-deduktiver Aufbau auch in der Schule nicht notwendig und trotzdem sowohl mathematisch als auch didaktisch sinnvoll, werden doch neben der Erkenntnissicherung vor allem die logischen Zusammenhänge zwischen Sätzen aufgedeckt. Zwei zentrale Fragen tauchen auf:

1. Wie komme ich zu einem A ?
2. Welche $A_1, A_2 \dots$ eignen sich für ein Herleiten?

Die üblichen technischen Möglichkeiten der DGS, nämlich

- Zugmodus (Dynamisierung von Zirkel- und Linealkonstruktionen)
- Mess- und Rechenmodus (laufend aktualisiert)
- Ortslinienmodus (nicht nur als "Punktwolke")
- Makromodus (erlaubt unter anderem automatische Abläufe)

unterstützen die erste Fragestellung, insbesondere wie oben dargelegt durch Einbeziehung von "Funktionswissen" (funktionsunterstützter Zugmodus). Besonders effizient für ein Finden von A sind die

- Suche nach konstanten Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten
- Bestimmung von Proportionalitätsfaktoren
- Verwendung von zusammengesetzten Funktionen ($y^2(x), \sqrt{y(x)}, \dots$)

Damit werden sonst nicht oder kaum wahrnehmbare invariante Eigenschaften sichtbar und quantifizierbar gemacht und man muß sich nicht nur auf Schnitt- und Inzidenzinvarianten beschränken (naturwissenschaftliche Methoden - "physikalische" Geometrie).

Vermuten = Finden von invarianten Eigenschaften.

5.2 Nicht nur Ziehen

Erfahrungen mit Schülern und die didaktische Literatur zeigen, daß man sich allzuerne mit der Phase des Vermutens, also mit dem Finden von Invarianten begnügt, der Zugmodus verleitet einfach dazu. Wie schon erwähnt, kann eine selbständige und erfolgreiches Finden von Vermutungen die Neugier nach dem "Warum" wecken. Um jedoch an die Phase des Vermutens jene des Begründens anschließen zu können, sollte eine DGS mehr als nur Ziehen, Messen und Rechnen können, um mögliche A_i für das Herleiten zu entdecken.

So gibt es in THALES zusätzlich zu den anderen Optionen noch einen **Umordnungsmodus**, durch den geometrische Relationen aufgebrochen (aber auch wieder eingerenkt) werden können. Dadurch wird eine Dynamisierung von Zerlegen, Zusammenfügen, Ergänzen und Anpassen realisiert. Durch die "Folientechnik" sind ein (auch mehrfaches) Übereinanderlegen und ein Herausbewegen von Teilfiguren wie auch automatische Abläufe möglich. Bildschirmteilungen wiederum ermöglichen ein simultanes Beobachten von Anfangs- und Endzuständen. Insgesamt könnte man von einer "Patchwork"- bzw. "Schnipselgeometrie" sprechen. Wiederum

helfen Messungen und Rechnungen beim Auffinden von gleichen Bestimmungsstücken (wie Flächeninhalt, Winkel und andere), die sich zum Verschieben und Anpassen eignen.

Das Zusammenspiel von Mess-, Rechen- und Umordnungsmodus liefert so als vertrauten Bereich anschauliche Evidenzen und bekannte Konstellationen und ermöglicht eine bildunterstützte CAEM. Diese Form des Unterrichts unterstützt das Auffinden von

- geschickten Hilfslinien (etwa durch automatische Abläufe)
- Zerlegungen in und Anpassungen von geeigneten Teilfiguren
- bekannten Konstellationen ("wie gehabt"):
Ähnliche Dreiecke, Strahlensatzfigur, Peripheriewinkelfigur, ...
- Ergänzungen zu "schönen" bzw. bekannten Figuren

und die Realisierung von "logischen Handlungen" wie "Von Gleichem Gleiches wegnehmen ergibt Gleiches".

Durch zwischenzeitliches Ziehen an der Figur kann man sich laufend davon überzeugen, ob eine gefundene Handlung stets durchführbar ist: Passvorgänge müssen erhalten bleiben, andernfalls muß eine neue Konstellation gefunden werden.

Und nun das Wichtigste: Beharrt man ständig darauf, daß Passvorgänge mittels (ausgemachter) anschaulicher Evidenzen oder schon bewiesener Sätze (= Konstellationen) begründet werden, erhält man durch die Schilderung, welche bekannte Konstellationen man wie erreicht hat, einen vollwertigen Beweis in einer enaktiven und bildunterstützten Formulierung.

Beweisen = Finden von stets durchführbaren Handlungen.

DGS ermöglicht auf diese Weise ein visuelles, aber trotzdem vollgültiges Begründen (Elschenbroich 1997).

Die Legitimationen der Passvorgänge erübrigen das Ziehen an der Figur: Die Allgemeingültigkeit ist auch am Einzelbild ablesbar.

Der Beweis ist im übrigen verstanden und die Überzeugung erreicht, wenn er mündlich und enaktiv-ikonisch geführt werden kann. Eine im Anschluß daran geübte symbolische Formulierung hilft kaum zu einem vertiefteren Verständnis.

6 Vorteile der DGS

Der Zugmodus, insbesondere der funktionsunterstützte, unterstützt eigentlich nur die Vermutungsphase. Erst im Zusammenspiel mit dem oben beschriebenen Umordnungsmodus ergibt sich eine Unterstützung für das Finden von Begründungen und zwar in Form von bildunterstützten Rückführungen auf bekannte Konstellationen. Insgesamt ergeben sich so einige Vorteile einer nicht nur ziehenden DGS:

- DGS liefert vom "Kopf ausgelagerte" Vorstellungen, mit denen wegen der Präzision und schnellen Beweglichkeit genau so gearbeitet werden kann wie mit "inneren" Vorstellungen. Dies ist bedeutsam für vorstellungsschwache Schüler.

- DGS-Bilder übertreffen innere Vorstellungen (Kreatives Potential von DGS):
 - Verquickung mit Messungen, Rechnungen, Ortslinien und Funktionen lassen mehr Beziehungen sichtbar werden.
 - Umordnen ermöglicht ein materielles Zerlegen, Ausschneiden, Zusammensetzen, ... Figuren vor seinem geistigen Auge erscheinen zu lassen ist oft zu wenig.
 - Automatische Abläufe ermöglichen ein Distanzieren vom konkreten Handeln und ein Beobachten von Grenzlagen, an die man sonst kaum denkt.
- DGS ermöglicht ein sichtbares Ineinanderführen von verschiedenen Satzgruppen und Handlungen (Sehnensatz → Sekantensatz → Tangentensatz; Ellipse → Hyperbel → Parabel)
- DGS unterstützt durch die Dynamisierung (nicht nur Ziehen) das Sehen einer Figur in einer Zeichnung und zusammen mit der Begründung von Passvorgängen die Allgemeingültigkeit einer Handlung.
Einzelbild = eingefrorene (stets durchführbare) Handlung = Figur

So gilt noch nach 90 Jahren und läßt sich leichter denn je verwirklichen das von P. Treutlein 1911 im Geometrischen Anschauungsunterricht formulierte Programm:

„... müssen sie beizeiten daran gewöhnt werden, die Figuren als jeden Augenblick veränderlich zu denken und dabei auf die gegenseitige Abhängigkeit ihrer Stücke zu achten, diese zu erfassen und beweisen zu können.“

Durch den Einsatz von DGS kann man die Wörter "denken" und "erfassen" ersetzen durch das Wort "sehen". Nach einer gewissen Zeit der Gewöhnung werden einige Schüler auf den Einsatz von DGS verzichten können (aber vielleicht nicht mehr wollen).

Literatur

- Elschenbroich, H.-J. (1997): Dynamische Geometrieprogramme: Tod des Beweisens oder Entwicklung einer neuen Beweiskultur? MNU 50(8)
- Hentschel, T.; Pruzina, M. (1995): Graphikfähige Taschenrechner im Mathematikunterricht. JMD 16, Heft 3-4
- Kadunz, G.; Kautschitsch, H. (1993): THALES. Software zur experimentellen Geometrie. Stuttgart: Ernst Klett
- Strunz, K. (1968): Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht. Heidelberg
- Wittmann, Erich (1987): Anwendung des operativen Prinzips bei der Produktion mathematischer Filme. - In: Kautschitsch, H.; Metzler, W. (Hg.): Medien zur Veranschaulichung von Mathematik, Stuttgart: B.G. Teubner

Grundlagen dynamischer Geometrie

*Ulrich H. Kortenkamp, Berlin
Jürgen Richter-Gebert, Zürich*

In this article we present fundamental definitions that can be used to introduce a mathematical model for dynamic geometry. Starting from reasonable expectations that such a model should meet we will formalize the terms (dynamic) construction, instance of a construction and Dynamic-Geometry-System (DGS). The behavior of a DGS will be described by the terms conservatism and continuity. One of the main results of this article is that we can find a continuous DGS for any construction Z that is built up using algebraic basic construction steps only.

1 Dynamische Geometrie-Systeme

Stellen Sie sich eine Seite aus einem GeometrieKapitel eines Mathematikschulbuchs vor. In aller Regel enthält eine solche Seite Bilder, welche einen bestimmten geometrischen Sachverhalt visualisieren sollen. Dabei kann es sich um einfache geometrische Lehrsätze, wie die Tatsache, dass sich die Winkelhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, handeln. Während der geometrische Lehrsatz für beliebige Dreiecke gilt, gibt die Zeichnung nur ein einzelnes Beispiel wieder.

Dynamische Geometrie ermöglicht es nun mit Computerunterstützung den geometrischen „Erfahrungshorizont“ zu erweitern und durch das Bewegen einer Zeichnung Allgemeingültigkeiten zu erkennen – oder zu verwerfen. In dynamischer Geometrie existiert eine Zeichnung nicht nur als statisches Bild, sondern sie wird intern als Abfolge von Konstruktionsschritten beschrieben. Dadurch kann ein neues Bild aus den Koordinaten der Anfangspunkte berechnet werden. So kann man die Anfangspunkte einer Konstruktion mit der Maus zu greifen und sie in einem *Zugmodus* bewegen, wobei die gesamte Konstruktion sich konsistent mitbewegt. Bild 1 stellt eine statische Visualisierung des Winkelhalbierendensatzes der Idee¹ einer dynamischen Visualisierung gegenüber. Die angegebene Konstruktionssequenz beschreibt, wie man ausgehend von den Punkten A , B und C das Bild des Winkelhalbierendensatzes konstruiert. Liegt eine solche Konstruktionssequenz vor, so kann man die frei wählbaren Punkte nachträglich mit der Maus verschieben, wobei der Computer für jede neue Position ein neues Bild berechnet und anzeigt. Es entsteht der Eindruck einer fließenden Bewegung.

¹Leider können die dynamischen Effekte in einer gedruckten Publikation nicht wirklich wiedergegeben werden. Zur Ergänzung des Artikels stehen daher unter <http://www.cinderella.de/de/research/gdg.html> Cinderella-Konstruktionen als Applets zur Verfügung, die interaktiv verändert werden können.

- 1: A=FreierPunkt;
- 2: B=FreierPunkt;
- 3: C=FreierPunkt;
- 4: a=Gerade (B, C);
- 5: b=Gerade (A, C);
- 6: c=Gerade (A, B);
- 7: d=Winkelhalbierende (b, c);
- 8: e=Winkelhalbierende (a, c);
- 9: f=Winkelhalbierende (a, b);
- 10: D=Schnittpunkt (d, e);

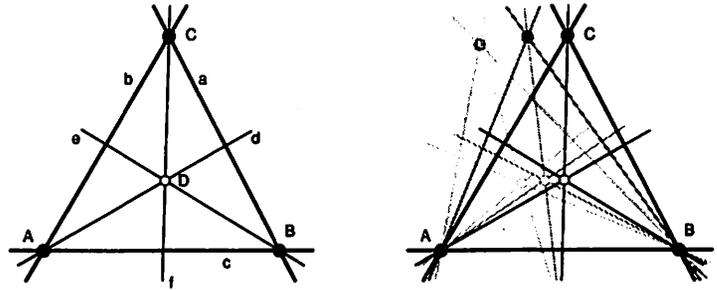


Abbildung 1: Konstruktionssequenz, statisches Bild, Idee des dynamischen Bildes

Der wesentliche Unterschied zwischen dynamischer Geometrie und klassischer, statischer, Elementargeometrie besteht darin, dass der Ereignisraum um eine Dimension erweitert wird, welche die Rolle einer kontinuierlich fortschreitenden Zeit spielt. Während dieser verändert sich die Konstruktion in den ihr gegebenen Grenzen. Hierbei werden bestimmte Punkte der Konstruktion zeitkontinuierlich parametrisiert bewegt, und die abhängigen Elemente sollen in „sinnvoller Weise“ folgen. Eine Problematik, der sich jedes DGS stellen muss, ist, dass im Gegensatz zu dem gerade beschriebenen Ideal einer kontinuierlich verstreichenden Zeit im Computer die Zeit in keiner Weise kontinuierlich verläuft: Bewegt man einen Punkt mit der Maus über den Bildschirm, so erhält der Computer eine diskrete Folge von Mauspositionen. Der Computer, bzw. die Software, muss für jede dieser Positionen entscheiden, welches Bild passend dazu gezeichnet werden soll.

Das Ziel dieses Artikels ist es, eine mögliche mathematische Modellierung dynamischer Geometrie zu beschreiben. Eine solche Modellierung muss zwangsläufig (bewusst oder unbewusst) erfolgen sobald ein dynamisches Geometriesystem tatsächlich implementiert wird. Die Wahl der Modellierung bestimmt entscheidend das spätere Verhalten des DGS. Letztlich zeigt sich die Sinnhaftigkeit einer bestimmten Modellierung a posteriori in den Stärken und Schwächen des auf ihrer Grundlage implementierten Systems.² Man kann aber auch a priori bestimmte Qualitätsmerkmale axiomatisch fordern und auf mathematischer Basis zeigen, dass eine bestimmte Modellierung diesen Qualitätsansprüchen genügt – oder zeigen, dass es eine solche Modellierung nicht geben kann. Dies entspricht dem Aufbau dieses Artikels: Ausgehend von sinnvoll erscheinenden Grundforderungen an ein DGS soll die Menge der möglichen Modellierungen sehr stark eingeschränkt werden.

Wir beschränken alle folgenden Betrachtungen auf den zweidimensionalen Fall. Viele der beschriebenen Konzepte lassen sich dennoch wortwörtlich auf höherdimensionale Situationen verallgemeinern.

Naturgemäß umfasst eine Begriffsbildung grundlegender Art das Aufstellen vieler formaler Definitionen. Dies empfinden wir hier nicht als Nachteil, denn eine solche Formalisierung ist im Fall der Dynamischen Geometrie ausgesprochen fruchtbar. Sie führt fast zwangsläufig auf Zusammenhänge

²Nicht zu vergessen ist hier, dass ein DGS zum Einsatz in der Lehre dringend einer klaren mathematischen Modellierung bedarf, da diese den zu erfahrenden mathematischen Inhalt, die Semantik des DGS, bestimmt. Ein Curriculum, welches den Einsatz des Computers fordert, muss sich auf die durch den Computer eingebrachten Inhalte verlassen können. Der Wechsel von einer Software zur anderen sollte sich nicht in einem Wechsel von einer Geometrie-Art zur anderen niederschlagen.

mit komplexer Analysis und algebraischen Kurven, die auf den ersten, informellen Blick verborgen bleiben. Wir hoffen, dass sie den Leser zur tieferen Erkenntnis der Komplexität und Schönheit der behandelten Materie führen, und uns somit die hohe Zahl der zu verarbeitenden Konzepte verzeihen wird.

2 Mengentheoretische Modellierung

2.1 Konstruktionen, Konstruktionen und Instanzen

Typischerweise wird in einem DGS eine Zeichnung durch eine Abfolge von elementaren Operationen erstellt. Jede solche elementare Operation entspricht einer geometrischen Grundoperation („Hinzufügen eines freien Punktes“, „Verbinden zweier Punkte durch eine Gerade“, „Schlagen eines Kreises um einen Mittelpunkt und durch einen Randpunkt“, etc.). Durch die Eingabe einer solchen Operationsfolge entsteht im Computer eine Konstruktionssequenz, eine Art Programm, welche das Verhalten des Bildes während des Zugmodus (weitgehend) festlegt. Wir setzen im Folgenden diese Konstruktionssequenz mit der eigentlichen „Konstruktion“, dem abstrakten, vom Benutzer intendierten geometrischen Sachverhalt, gleich. Was man auf dem Bildschirm sieht, ist immer nur das Bild einer „Instanz“ der Konstruktion: eine konkrete Zeichnung, die allen durch die Konstruktion vorgegebenen Relationen gerecht wird. Unser erstes Teilziel soll es sein, die zu einer Konstruktion passenden möglichen Instanzen zu beschreiben. Ein relationskonsistentes Zugverhalten ist die gemeinsame Grundlage aller DGS. Wir werden aber sehen, dass selbst für eine feste Position der Ausgangspunkte es durchaus noch *mehrere* Instanzen *derselben* Konstruktion geben kann. In einem zweiten Schritt werden wir zeigen wie man aus diesen möglichen Instanzen aufgrund sinnvoll erscheinender Grundforderungen *bestimmte* Instanzen konsistent mit den Forderungen auswählt.

2.2 Geometrische Grundobjekte

Grundobjekte, mit denen ein DGS auf alle Fälle umgehen können muss, sind *Punkte*, *Geraden* und *Kreise*. Je nach dem geplanten Einsatzfeld ist es sinnvoll, diese recht kleine Menge von Grundobjekten zu erweitern. So ist es auch denkbar, *Zahlen* zuzulassen, sobald Messungen und das Abtragen von Größen erlaubt sein sollen. Auch *Kegelschnitte* oder *algebraische Kurven* höheren Grades sind Gegenstand der Betrachtung und Implementation mancher DGS.³

Es ist hierbei wichtig, zwischen der *internen Repräsentation* eines Objektes, der *Darstellung auf dem Bildschirm* und der eigentlichen *mathematischen Idee* des Objektes klar zu differenzieren. Ziel einer Modellierung sollte es sein, die mathematische Idee durch die computerinterne Repräsentation möglichst exakt darzustellen. In diesem Artikel soll modellhaft die euklidische Ebene mit Punkten, Geraden und Kreisen als Grundobjekten beschrieben werden. Die dargestellte Beschreibung kann analog auf andere Situationen übertragen werden.

Üblicherweise werden bei der Erstellung bzw. Beschreibung einer Konstruktion die Grundobjekte nacheinander durch eine Folge von Operationen angegeben (vgl. die Konstruktionssequenz in

³Tatsächlich unterstützt nur ein kleiner Bruchteil der erhältlichen DGS Kegelschnitte, was sowohl an der fehlenden Integration in das Curriculum als auch an den besonderen Schwierigkeiten in der Implementation liegt.

Bild 1). Die konstruierten Objekte müssen während des Zugmodus eine „Objektidentität“ behalten: Ein Punkt soll auch weiterhin als Punkt und nicht als Gerade, oder als Kreis dargestellt werden. Dies ist insbesondere wichtig, da die Semantik der Grundoperationen entscheidend von der Typisierung der Eingabegrößen abhängt. Dabei kann es jedoch durchaus vorkommen, dass eine bestimmte Grundoperation nicht ausführbar, wie das Schneiden zweier disjunkter Kreise oder zweier paralleler Geraden, oder nicht eindeutig ist, wie die Verbindungsgerade zweier zusammenfallender Punkte. Der Umgang mit solchen nichtdurchführbaren Operationen bietet einen erheblichen Modellierungsspielraum. In gewisser Weise entscheidet er sogar über die „eigentlich“ modellierte Geometrie. Um nicht von vorneherein eine andere, zum Beispiel die projektive, Geometrie als Grundlage für die Modellierung heranzuziehen, beziehen wir uns zunächst nur auf tatsächlich durchführbare Operationen. Damit halten wir uns für später noch Freiheiten in der Modellierung offen.⁴

Das Ergebnis einer durchführbaren Operation bezeichnen wir als „existentes“ Objekt. Dies führt uns zu unserer ersten, naheliegenden, Grundforderung:

Grundforderung 1 (Objektidentität): *In jeder Instanz einer Konstruktion sollen existente Objekte der während der Konstruktion festgelegten Typisierung gehorchen.*

Kurz gesagt: Ein Punkt ist ein Punkt und bleibt ein Punkt.

Da wir die euklidische Ebene mit Punkten, Geraden und Kreisen als zulässigen Objekten darstellen wollen, definieren wir drei Mengen P , G und K , die Mengen aller euklidischen Punkte, Geraden bzw. Kreise. Jede dieser Mengen erweitern wir um ein Objekt $*$, welches das Ergebnis einer nicht durchführbaren Operation darstellt. Wir setzen $\tilde{P} = P \cup \{*\}$, $\tilde{G} = G \cup \{*\}$, und $\tilde{K} = K \cup \{*\}$. Die Konstruktionsschritte einer Konstruktion legen nun eine bestimmte Typisierung

$$O = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \{\tilde{P}, \tilde{G}, \tilde{K}\}^n$$

für deren Instanzen fest. Eine Instanz einer Konstruktion besteht dann aus einer Abfolge von konkreten Objekten $(o_1, \dots, o_n) \in O$. Diese müssen untereinander noch gewisse relationale Zusammenhänge erfüllen, um tatsächlich Instanz einer *bestimmten* Konstruktion zu sein.

2.3 Geometrische Grundoperationen

Eine geometrische Grundoperation erzeugt aus einer (eventuell leeren) Auswahl von bereits konstruierten Objekten ein neues Objekt. Hierbei ist die Typisierung der Ein- und Ausgabeobjekte durch die Art der Grundoperation streng vorgegeben. Typische Vertreter sind „Erzeuge einen freien Punkt“, „Erzeuge den Schnittpunkt zweier Geraden“, „Erzeuge die Verbindungsgerade zweier Punkte“, „Erzeuge eine Winkelhalbierende zweier Geraden“ oder „Erzeuge einen Schnittpunkt von Gerade und Kreis“. Geometrische Grundoperationen setzen die Objekte einer Konstruktion zueinander in Beziehung. Um potentiellen Mehrdeutigkeiten oder der Undurchführbarkeit von Operationen Rechnung zu tragen, stellen wir eine geometrische Grundoperation als Relation $\omega \in I_1 \times \cdots \times I_k \times O$ mit $I_1, \dots, I_k, O \in \{P, G, K\}$ dar. Die ersten k Einträge spielen hierbei die Rolle der Eingangselemente. Die Zahl k ist die *Stelligkeit* der Operation. Der letzte Eintrag stellt das Ergebnis der Operation

⁴Genaugenommen werden wir durch die nun folgenden Grundforderungen erzwingen, dass die Dynamische Geometrie den historischen Entwicklungen in der Geometrie folgt. Die Modellierungsfreiheiten werden dabei nicht willkürlich, sondern mathematisch begründet genutzt.

dar. Die Menge O bezeichnen wir als *Typ* der Grundoperation. Die Menge $\omega(i_1, \dots, i_k) := \{o \in O \mid (i_1, \dots, i_k, o) \in \omega\}$ bezeichnen wir als *Ausgabemenge* von ω zur Eingabe (i_1, \dots, i_k) . So lässt sich die Operation „Verbindungsgerade“ als 2-stellige Relation auf $\mathbf{P} \times \mathbf{P} \times \mathbf{G}$ vom Typ „Gerade“ auffassen. Die relationale Modellierung erlaubt es uns die Verbindungsgerade zweier identischer Punkte p und q sowohl als nicht-existent anzusehen, als auch jede Gerade durch p zuzulassen. In einem Falle wäre $\omega(p, p)$ leer, im anderen unendlich groß. Üblicherweise hat eine geometrische Grundoperation ω bei allgemeiner Lage der Eingangselemente aber nur eine *endliche* Menge von möglichen Ausgabewerten $\omega(i_1, \dots, i_k)$.⁵ In Teil 4 untersuchen wir diese Mehrdeutigkeiten genauer und definieren dazu die Bézout-Zahl einer Operation.

Grundforderung 2 (Relationskonsistenz): *Jede vom DGS gezeigte Instanz einer Konstruktion soll den durch die Konstruktion gegebenen Relationen genügen.*

Wir fassen nun beide Grundforderungen in einer formalen Definition von Konstruktion und Instanz zusammen. Eine geometrische Grundoperation $\omega \in I_1 \times \dots \times I_k \times O$ erweitern wir zu einer Operation $\tilde{\omega}$ auf $\tilde{I}_1 \times \dots \times \tilde{I}_k \times \tilde{O}$ gemäß:

$$\tilde{\omega} = \omega \cup \{(i_1, \dots, i_k, *) \in I_1 \times \dots \times I_k \times \tilde{O} \mid \text{Es gibt kein } o \text{ mit } (i_1, \dots, i_k, o) \in \omega\} \\ \cup \{(i_1, \dots, i_k, o) \in \tilde{I}_1 \times \dots \times \tilde{I}_k \times \tilde{O} \mid \text{Es gibt ein } j \text{ mit } i_j = *\}.$$

Die erste Zeile erweitert jede Operation so, dass wenigstens das „nicht durchführbar“-Symbol $*$ als Ausgabe verfügbar ist. Die zweite Zeile gibt uns die Freiheit einer zusätzlichen Struktur im $*$ -Element: Wird $*$ als Eingabe einer Operation verwendet, so ist jede Ausgabe möglich. Die im nächsten Kapitel formulierte Grundforderung nach Kontinuität schränkt allerdings hierbei die sinnvollen Möglichkeiten der Wahl der Ausgabeelemente wieder stark ein.

Wir fassen alle von dem DGS zugelassenen derart erweiterten Grundoperationen in einer Menge \mathcal{G} zusammen. Diese Menge ist der „Befehlssatz“ des DGS, die Menge der ausführbaren Grundoperationen.

Definition 2.1 *Eine (dynamische) Konstruktion Z besteht aus*

- (i) *einer Sequenz (O_1, O_2, \dots, O_n) mit $O_i \in \{\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{K}}\}$ für $i = 1, \dots, n$,*
- (ii) *einer Sequenz $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_n) \in \mathcal{G}^n$, wobei jede Operation $\tilde{\omega}_i$ vom Typ O_i ist,*
- (iii) *und für jede k -stellige Operation $\tilde{\omega}_i \subset I_1 \times \dots \times I_k \times O_i$ einer Eingabebezuordnung $v_i = (s_1^i, \dots, s_k^i) \in \mathbb{N}^k$ mit $s_j^i < i$ für $j = 1, \dots, k$ und $O_{s_j^i} = I_j$ für $j = 1, \dots, k$.*

Teil (i) definiert die Typisierung der verschiedenen Elemente der Konstruktion. Teil (ii) stellt die Grundoperationen bereit, aus denen die einzelnen Elemente berechnet werden sollen. Teil (iii) stellt die Verknüpfung der einzelnen Konstruktionsschritte her, in der festgelegt wird, welches die Eingangswerte der Grundoperationen sind. Gleichzeitig stellen wir sicher, dass die Eingangswerte bereits berechnet wurden und den korrekten Typ haben.

⁵Einige typische Operationen auf Punkten, Geraden, Kreisen und Kegelschnitten klassifiziert nach Mehrdeutigkeit: **Eindeutige Operationen:** Schnittpunkt, Verbindungsgerade, Mittelpunkt, Senkrechte, Parallele, Mittelsenkrechte, Kreis mit Mittelpunkt und Randpunkt, Kreis durch drei Punkte, Kegelschnitt durch fünf Punkte. **Zweideutige Operationen:** Schnitt Gerade/Kreis, Schnitt Kreis/Kreis, Schnitt Gerade/Kegelschnitt, Winkelhalbierende, Kegelschnitt mit Brennpunkten durch Randpunkt. **Vierdeutige Operationen:** Schnitt Kegelschnitt/Kegelschnitt, Schnitt Kegelschnitt/Kreis, Tangente an 2 Kreise.

Definition 2.2 *Es sei Z eine Konstruktion mit Daten wie in Def. 2.1. Eine Instanz von Z ist ein Element $o = (o_1, o_2, \dots, o_n) \in O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n$, so dass $(o_{s_1^i}, o_{s_2^i}, \dots, o_{s_k^i}, o_i) \in \tilde{\omega}_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Die Menge aller Instanzen von Z bezeichnen wir mit I_Z .*

Diese Definition bildet einen gemeinsamen Nenner für verschiedene DGS und fasst die wesentlichen Eigenschaften zusammen, die *jedes* DGS aufweisen sollte. Gleichzeitig führt sie eine klare Trennung von Syntax und Semantik einer Konstruktion durch. Eine Instanz einer Konstruktion ist eine Realisierung der durch die Konstruktionsvorschrift geforderten Bedingungen. Wir werden später auf dieser allgemeinen Ebene das Konzept eines konkreten DGS beschreiben, d.h. das durch das DGS festgelegte Verhalten einer Konstruktion unter Bewegung freier Elemente. Hierzu müssen wir zunächst noch einen Stetigkeitsbegriff einführen.

3 Koordinatendarstellungen und Stetigkeit

3.1 Objektmengen als topologische Räume

Bislang weisen die Mengen \mathbf{P} , \mathbf{G} und \mathbf{K} keinerlei innere Struktur auf und die Grundoperationen konnten im Prinzip durch beliebige Relationen definiert sein. Dies entspricht in keiner Weise der zu modellierenden geometrischen Realität. Die nun folgenden Ausführungen sollen gezielt auf geometriehärente Eigenschaften eingehen, die uns ermöglichen werden, das wünschenswerte Verhalten eines DGS weiter abzugrenzen. Um Begriffe wie „Stetigkeit“ ausdrücken zu können, gehen wir nun zu Koordinaten und Parameterdarstellungen der geometrischen Objekte über.

Wir können die Mengen \mathbf{P} , \mathbf{G} , und \mathbf{K} durch geeignete Definition von ε -Umgebungen mit einer Topologie versehen, um darüber einen Stetigkeitsbegriff einzuführen. Betrachten wir die Menge \mathbf{P} so wäre der naheliegende Zugang, diese mit \mathbb{R}^2 zu identifizieren und mit der üblichen Topologie auszustatten, indem wir jedem Punkt p seine (x, y) -Koordinaten zuweisen und ε -Umgebungen gemäß $U_\varepsilon((x_0, y_0)) = \{(x, y) \mid \|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \varepsilon\}$ definieren. Obgleich naheliegend, ist diese Definition nicht in allen Punkten zufriedenstellend. Betrachten wir hierzu die Situation des Schnittes S einer horizontalen Geraden l mit einer Geraden m , die um den Punkt R rotiert. Während der Rotation wandert S stetig entlang l , zum Beispiel nach rechts, bis zu dem Zeitpunkt t_0 in dem l und m parallel sind. Die Schnittoperation ist dann in der euklidischen Ebene nicht durchführbar. Im nächsten Moment kommt S dann wieder von links auf l stetig zu seiner ursprünglichen Lage zurück. Die stetige Bewegung von m hat also einen unstetigen Sprung von S zur Folge. Diese Situation ist unbefriedigend, weil es von S abhängige elementare Grundoperationen geben kann, die bei t_0 lediglich eine *hebbare* Unstetigkeitsstelle aufweisen. Verbinden wir zum Beispiel S durch eine Gerade k mit einem weiteren Punkt P , so kann die Unstetigkeit mit einer Parallelen zu l gehoben werden.

Diese Situation ist analog zum Heben von Unstetigkeiten rationaler Funktionen. Beispielsweise ist die Funktion $f(z) = 1/z$ an der Stelle $z = 0$ nicht definiert und hat einen unstetigen Polstelle. Die Funktion $z^2 \cdot f(z) = z^2/z$ hingegen hat bei $z = 0$ eine hebbare Unstetigkeit. Kompaktifizieren wir \mathbb{R} durch Hinzufügen eines Elementes ∞ und erweitern die Definition des Divisions-Operators, so können wir die anfängliche Polstelle als einen stetigen Übergang auffassen. Damit wird die Hebung der Singularität auf die Funktion $f(z)$ zurückgezogen.

In derselben Weise können wir in der geometrischen Situation verfahren und zur euklidischen Ebene Punkte im Unendlichen hinzufügen und den Übergang zur *projektiven Geometrie* vollziehen. Wir werden dies nur implizit in der Definition des Stetigkeitsbegriffes für Bewegungen von Punkten tun.⁶ Wir stellen dazu einen Punkt in \mathbf{P} durch homogene Koordinaten in \mathbb{R}^3 dar und betrachten den aus diesem Raum induzierten Stetigkeitsbegriff. Für einen Vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $z \neq 0$ definieren wir die Dehomogenisierung $p_{(x,y,z)} = (x/z, y/z)$. Der Vektor (x, y, z) ist also ein Vertreter der homogenen Koordinaten des Punktes $p_{(x,y,z)}$. Diese Darstellung ist nicht eindeutig, da $p_{(x,y,z)} = p_{(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}$ für $\lambda \neq 0$. Vektoren der Form $(x, y, 0)$ haben in \mathbf{P} keine Entsprechung. Sie können aber als Punkte im Unendlichen interpretiert werden, wobei auch hier skalare Vielfache $\lambda \neq 0$ der homogenen Koordinaten den gleichen unendlich fernen Punkt repräsentieren. Der Vektor $(0, 0, 0)$ entspricht allerdings weder einem Euklidischen noch einem unendlich fernen Punkt.

Ein *quasi-stetiger Weg* in \mathbf{P} soll im Prinzip eine stetige Abbildung des Einheitsintervalls $I = [0, 1]$ auf \mathbf{P} sein, aber endlich viele Unendlichdurchgänge und Definitionslücken erlauben. Dazu punktieren wir den Definitionsbereich unserer Abbildung geeignet: Für $k \geq 0$ sei $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \in]0, 1[$. Die Menge $I' = I - \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ nennen wir dann ein *punktiertes Einheitsintervall*. Im Folgenden bezeichne I' , sofern nicht anders angegeben, ein geeignet punktiertes Einheitsintervall.

Definition 3.1 Eine Abbildung $\varphi: I' \rightarrow \mathbf{P}$ heißt *quasi-stetiger Weg*, wenn es eine stetige Funktion $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ gibt mit $p_{\psi(t)} = \varphi(t)$ für alle $t \in I'$.

Diese Definition von Quasi-Stetigkeit stimmt genau mit der üblichen Definition von stetigen Wegen auf \mathbf{P} überein, bis auf die Tatsache, dass sie (bei den Parameterwerten $\{s_1, \dots, s_k\}$) endlich viele hebbare Definitionslücken und Punktdurchgänge durchs Unendliche zulässt. Stetige Durchgänge durch den Nullpunkt des \mathbb{R}^3 werden hier explizit nicht zugelassen, da diese unstetige Wege in \mathbf{P} induzieren könnten.

Analog kann man auch die Räume \mathbf{G} und \mathbf{K} mit Topologien und Stetigkeitsbegriffen ausstatten und quasi-stetige Wege von Geraden und Kreisen definieren. Nach Einführung von Koordinaten kann man eine Gerade $g \in \mathbf{G}$ durch drei geeignete Parameter (a, b, c) beschreiben gemäß $g = g_{(a,b,c)} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$. Kreise können wir durch Angabe der Parameter einer Kreisgleichung beschreiben $k_{(a,b,c,d)} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0\}$. Beide Darstellungen sind wieder nur bis auf ein skalares Vielfaches $\lambda \neq 0$ eindeutig.

Stetige Wege in den Parameterräumen \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^4 sollen nun wiederum quasi-stetige Wege in den Räumen \mathbf{G} und \mathbf{K} induzieren:

Definition 3.2 Eine Abbildung $\varphi: I' \rightarrow \mathbf{G}$ heißt *quasi-stetiger Weg*, wenn es eine stetige Funktion $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ mit $g_{\psi(t)} = \varphi(t)$ für alle $t \in I'$ gibt. Eine Abbildung $\varphi: I' \rightarrow \mathbf{K}$ heißt *quasi-stetiger Weg*, wenn es eine stetige Funktion $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ mit $k_{\psi(t)} = \varphi(t)$ für alle $t \in I'$ gibt.

Ist $o = (o_1, o_2, \dots, o_n) \in \{\mathbf{P}, \mathbf{G}, \mathbf{K}\}^n$ und sind $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ quasi-stetige Wege gleicher Typisierung wie o und $\varphi_i(0) = o_i$ für $i = 1, \dots, n$, die alle auf dem gleichen punktierten Intervall I' definiert sind, so nennen wir φ einen *quasi-stetigen Weg* mit Startpunkt o . Die Menge aller quasi-stetigen Wege mit Startpunkt o bezeichnen wir mit Φ_o .

Es soll nun untersucht werden, unter welchen Umständen eine Durchgang durch den Nullpunkt des

⁶Wir nehmen also insbesondere nicht an, dass ein DGS grundsätzlich homogene Koordinaten verwenden muss

Parameterraumes \mathbb{R}^d immer noch quasi-stetiges Verhalten auf den induzierten Objekten in \mathbf{P} , \mathbf{G} und \mathbf{K} induziert.

Theorem 3.3 *Es sei $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein stetiger Weg und $t_0 \in [0, 1]$. Ferner sei $A \subseteq \{1, \dots, d\}$ die Indexmenge der Koordinaten von ψ , die in einer Umgebung von t_0 nicht konstant 0 sind. Gilt nun*

(i) $A \neq \emptyset$,

(ii) *für alle $i, j \in A$ hat bei t_0 entweder $\psi_i(t)/\psi_j(t)$ oder $\psi_j(t)/\psi_i(t)$ eine stetig hebbare Definitionslücke oder ist stetig,*

dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, einen stetigen Weg $\theta: U_\varepsilon(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{0, \dots, 0\}$, eine Funktion $\lambda: U_\varepsilon(t_0) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\lambda(t) \cdot \theta(t) = \psi(t)$ für $t \in U_\varepsilon(t_0) \setminus \{t_0\}$.

BEWEIS. Für $\psi(t_0) \neq (0, \dots, 0)$ ist die Aussage klar, wir zeigen sie also für $\psi(t_0) = (0, \dots, 0)$. Für $i, j \in A$ setzen wir $i < j$ genau dann wenn $\lim_{t \rightarrow t_0} \psi_j(t)/\psi_i(t) \notin \mathbb{R}$. Gilt $i \not< j$ so existiert der reelle Grenzwert $g := \lim_{t \rightarrow t_0} \psi_j(t)/\psi_i(t) \in \mathbb{R}$ und wegen (ii) besitzt $\psi_j(t)/\psi_i(t)$ bei t_0 eine hebbare Definitionslücke.

Es gilt ferner $i < j \implies j \not< i$ und es gilt $(i < j) \wedge (j < k) \implies i < k$. Da A wegen (i) nicht leer ist, gibt es also ein $i \in A$ mit $i \not< j$ für alle $j \in A$. Somit muss es ein $\varepsilon > 0$ geben mit $\psi_i(t) \neq 0$ für alle $t \in U_\varepsilon(t_0) \setminus \{t_0\}$. Es sei $\theta(t) = \psi(t)/\psi_i(t)$ und $\lambda(t) = \psi_i(t)$ für $t \in U_\varepsilon(t_0) \setminus \{t_0\}$. Die Koordinateneinträge $\theta_j(t) = \psi_j(t)/\psi_i(t)$ von $\theta(t)$ haben wegen $i \not< j$ alle bei t_0 eine hebbare Unstetigkeit. Nach Heben dieser Unstetigkeit erfüllen ε , θ und λ die Konklusion unseres Theorems. \square

Die Bedeutung dieses Theorems im Rahmen unserer Überlegung ist die Folgende: Haben wir im Parameterraum eine stetige Funktion gegeben, die einen Durchgang durch den Koordinatenursprung hat, so induziert diese auf \mathbf{P} , \mathbf{G} , \mathbf{K} immer noch einen quasi-stetigen Weg, sofern die Bedingungen des Theorems erfüllt sind.

Analog zu quasi-stetigen Wegen, definieren wir quasi-lineare Wege:⁷

Definition 3.4 *Eine Abbildung $\varphi: I' \rightarrow \mathbf{P}$ heißt quasi-linearer Weg, wenn es eine lineare Funktion $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt mit $p_{\psi(t)} = \varphi(t)$ für alle $t \in I'$.*

Insbesondere gilt, dass bei einem quasi-linearen Weg φ eines Punktes alle Bilder $\varphi(t); t \in I'$ auf einer Geraden liegen. Analoge Definitionen gelten für Geraden und Kreise sowie Wege ganzer Instanzen.

Bemerkung: Bei der in der Projektiven Geometrie üblichen Darstellung durch homogene Koordinaten gruppiert man die Vektoren (x, y, z) durch Äquivalenzklassen gemäß $(x, y, z) \equiv \lambda(x, y, z)$ für $\lambda \neq 0$. Jeder projektive Punkt entspricht dann genau einer Äquivalenzklasse. Wir nehmen in diesem Artikel von dieser Betrachtungsweise Abstand, da wir später die Parameter bewegter Objekte durch analytische Funktionen in \mathbb{R}^n ausdrücken werden und das Verhalten insbesondere um den Koordinatenursprung des Parameterraumes von besonderer Bedeutung sein wird.

3.2 Formale DGS

Bisher haben wir auf rein mengentheoretischer Basis den Begriff einer Konstruktion charakterisiert und beschrieben, was es heißt, eine Instanz einer Konstruktion zu sein. Wir wollen auf dieser

⁷Eigentlich müssten wir von quasi-stetigen linearen Wegen reden.

abstrakten Ebene das Verhalten eines konkreten DGS modellieren. Hierzu müssen wir im Wesentlichen zwei Dinge leisten. Einerseits müssen wir eine saubere Trennung von frei beweglichen und von abhängigen Elementen durchführen. Andererseits müssen wir beschreiben, wie sich die abhängigen Elemente unter der Bewegung der freien Elemente verhalten.

Gegenüber einem auf einem Computer implementierten DGS werden wir hierbei noch eine wesentliche Idealisierung machen. Wir gehen nämlich in der folgenden Modellierung davon aus, dass die freien Elemente *kontinuierliche* Wege beschreiben – im Gegensatz zu der tatsächlichen Situation, in der die Maus lediglich Positionsinformationen zu bestimmten, diskreten Zeitpunkten liefert. Zwischen diesen Stützstellen muss beim Übergang zu der hier beschriebenen idealisierten Modellierung interpoliert werden. Dabei besteht noch eine gewisse Freiheit, welche wir in einem späteren Kapitel noch behandeln (und ausschöpfen) werden.

Wir beschränken uns im Folgenden darauf, dass in einem DGS jedes Element entweder als *vollkommen frei* oder als *abhängig* gelten soll. Den Fall *halbfreier* Punkte (zum Beispiel Punkt auf Gerade oder Punkt auf Kreisrand) werden wir hier nicht behandeln.⁸

Es sei nun \mathcal{G} der Befehlssatz des DGS und \mathcal{G} enthalte die einstelligen Relationen $\tilde{\omega}_P = \tilde{P}$, $\tilde{\omega}_G = \tilde{G}$ und $\tilde{\omega}_K = \tilde{K}$. Diese drei Operationen erzeugen frei wählbare Punkte, Geraden oder Kreise. Es sei Z eine Konstruktion mit Objekten $(O_1, O_2, \dots, O_n) \in \{\tilde{P}, \tilde{G}, \tilde{K}\}^n$ und einer Folge von Operationen $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_n) \in \mathcal{G}^n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die ersten k dieser Operationen, und *nur* die ersten k Operationen, Elemente aus $\{\tilde{\omega}_P, \tilde{\omega}_G, \tilde{\omega}_K\}$ sind. Die Objekte O_1, \dots, O_k sind die *freien* Elemente der Konstruktion. Alle anderen Elemente heißen *abhängig*.

Die typische Aktion im Zugmodus eines DGS besteht nun darin, ausgehend von einer bestimmten Instanz $o = (o_1, \dots, o_n)$ von Z die freien Elemente zu nehmen, und diese mit der Maus an einen anderen Ort zu bewegen. Das DGS soll hierbei alle abhängigen Elemente nachziehen und für jede Position eine Instanz von Z anzeigen. Das Verhalten des DGS ist durch diese Forderung aufgrund der Mehrdeutigkeiten in manchen Grundoperationen noch nicht festgelegt.

Definition 3.5 *Es sei Z eine Konstruktion, deren erste k Elemente frei sind und $o = (o_1, \dots, o_n) \in \mathbf{I}_Z$ sei eine Instanz von Z . Ferner sei $f(Z, o) = (o_1, \dots, o_k)$ die Position der freien Startelemente. Ein formales DGS zu (Z, o) ist eine Abbildung $\mathcal{D}: \Phi_{f(Z, o)} \rightarrow \mathbf{I}_Z$, so dass für $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in \Phi_{f(Z, o)}$ und $o' = (o'_1, \dots, o'_n) = \mathcal{D}(\varphi)$ die Relation $(\varphi_1(1), \dots, \varphi_k(1)) = (o'_1, \dots, o'_k)$ gilt. Gilt für zwei Wege $\varphi, \theta \in \Phi_{f(Z, o)}$ die Identität $\varphi(t) = \theta(t)$ für alle t in einem punktierten Einheitsintervall I' so soll zusätzlich $\mathcal{D}(\varphi) = \mathcal{D}(\theta)$ gelten.*

Die Ausgangssituation in einem DGS wird also durch Vorgabe einer Konstruktion Z und einer passenden Startinstanz o gegeben. Ein formales DGS ordnet dann jedem quasi-stetigem Weg φ der freien Elemente eine zu Z passende Endinstanz o' zu, bei der die freien Elemente die Endpositionen aus φ einnehmen. In dieser Definition ist eine weitere unscheinbare Grundforderung an ein DGS versteckt.

Grundforderung 3 (Determinismus): *Ein DGS soll sich deterministisch verhalten: Bei der Ausführung der gleichen Bewegung von der gleichen Ausgangssituation aus soll man immer in der*

⁸Halbfreie Elemente erfordern entweder zusätzliche Randbedingungen, die vom DGS automatisch hinzugefügt werden (im Idealfall durch den Benutzer beeinflussbar), oder neue Konzepte für die Darstellung und Behandlung zusätzlicher Freiheiten in Konstruktionen.

gleichen Endsituation anlangen.⁹

Nach der obigen Definition kann der Weg der freien Elemente noch die Endposition der Konstruktion beeinflussen: Für zwei Wege $\varphi, \theta \in \Phi_{f(Z,o)}$ mit $\varphi(1) = \theta(1)$ kann $\mathcal{D}(\varphi) \neq \mathcal{D}(\theta)$ gelten. Solche *Monodromie-Effekte* werden bei den meisten DGS vermieden, und wir nennen ein derartiges DGS *konservativ*. Formaler:

Definition 3.6 *Gilt für ein formales DGS \mathcal{D} für alle $\varphi, \theta \in \Phi_{f(Z,o)}$ mit $\varphi(1) = \theta(1)$ immer $\mathcal{D}(\varphi) = \mathcal{D}(\theta)$ so, heißt \mathcal{D} konservativ.*

Insbesondere gilt für ein konservatives formales DGS, dass für eine Bewegung einer Konstruktion Z von einer Instanz o zu einer Instanz p mit $f(Z,o) = f(Z,p)$ schon $p = o$ gilt. Diese Tatsache macht die „Navigation“ in einem tatsächlichen DGS mit konservativem Verhalten einfacher, da man zu jeder einmal erreichten Position einfach zurückkehren kann. Oft wird daher aus didaktischen und softwareergonomischen Erfordernissen Konservatismus gefordert.¹⁰

Wir werden allerdings später sehen, dass dieser vermeintliche Vorteil auch erhebliche Nachteile mit sich bringt, da durch die Eindeutigkeit der Operationen viele Instanzen niemals erreicht werden können. Die mathematische Gesamtheit der zu einer Konstruktion gehörigen Instanzen, ihr „Konfigurationsraum“, ist unvollständig und kann nicht erfahren werden. Dies hat in der Praxis den Effekt, dass zum Beispiel manche Ortskurven nicht vollständig berechnet werden oder komplexere Konstruktionen nur in einem kleinen Bereich gültig sind.

Ein formales DGS \mathcal{D} zu einem Konstruktion/Startinstanz-Paar (Z,o) gibt uns also die „Zielinstanz“ $\varphi(1)$ für quasi-stetige Wege $\varphi \in \Phi_{f(Z,o)}$ an. Dadurch kennen wir aber auch den gesamten Weg der abhängigen Elemente, also die Position $\varphi(t)$ für jeden Zeitpunkt $t \in I'$ in dem punktiertem Definitionsintervall $I' = [0, 1] - \{s_1, \dots, s_k\}$. Dazu fassen wir $I' \cap [0, t]$ als ein skaliertes punktiertes Einheitsintervall auf. Das formale DGS \mathcal{D} legt fest, wie sich die abhängigen Elemente der Konstruktion bis zu diesem Zeitpunkt verhalten haben müssen. Als Hilfsmittel setzen wir für $M \subset \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die skalierte Menge $\lambda \cdot M = \{\lambda x \mid x \in M\}$ und definieren:

Definition 3.7 *Sei (Z,o) ein Konstruktion/Startinstanz-Paar und \mathcal{D} ein zugehöriges formales DGS. (O_1, \dots, O_n) sei die Typisierung von Z . Für einen quasi-stetigen Weg $\varphi \in \Phi_{f(Z,o)}$ mit punktierten Definitionsintervall I' definieren wir Funktionen $\varphi_{k+1}^{\mathcal{D}}: I' \rightarrow O_{k+1}, \dots, \varphi_n^{\mathcal{D}}: I' \rightarrow O_n$ gemäß:*

$$\varphi_i^{\mathcal{D}}(t) = \mathcal{D}(\varphi_t)_i,$$

wobei

$$\begin{aligned} \varphi_i: (1/t) \cdot (I' \cap [0, t]) &\rightarrow (O_1, \dots, O_k) \\ t' &\mapsto \varphi(t' \cdot t) \end{aligned}$$

der auf $[0, 1]$ umskalierte Weg der freien Elemente in $I \cap [0, t]$ ist.

Auch diese Definition wollen wir wieder umgangssprachlich deuten. Für ein gegebenes \mathcal{D} und einen Weg $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ der freien Elemente gibt die Funktion $\varphi_i^{\mathcal{D}}(t)$ für $i > k$ an, wo sich das abhängige Element o_i zum Zeitpunkt t befindet. Es ist an dieser Stelle wichtig zu bemerken, dass die Wegfunktionen $\varphi_i(t)$ der abhängigen Elemente nicht quasi-stetig sein müssen.

⁹Man beachte, dass diese Definition nicht der Definition von Determinismus in Kortenkamp (1999) entspricht.

¹⁰Außerdem vereinfacht sich auch die Implementierung eines konservativen DGS dadurch, dass für jede Grundoperation eine feste Rechenvorschrift programmiert werden muss. Für die Neuberechnung einer Instanz muss nur die Liste der Grundoperationen einer Konstruktion abgearbeitet werden, was sehr effizient durchgeführt werden kann.

3.3 Stetige Verformungen einer Konstruktion

Wir kommen nun zu unserer vierten Grundforderung an ein DGS, welche besagen soll, dass eine kontinuierliche Veränderung der Eingabeparameter eine kontinuierliche Veränderung der Ausgabe-parameter zur Folge haben soll. Dies ist eine erweiterte Formulierung des Wunsches nach Objekt-identität: Unter kontinuierlicher Bewegung der freien Elemente einer Konstruktion sollen abhängige Elemente nicht spontan von einer Stelle zur anderen springen.¹¹

Hierbei ist zu beachten, dass die Formulierung einer solchen Stetigkeitsforderung der Tatsache Rechnung tragen muss, dass manche Operationen für viele Eingabewerte nicht durchführbar sind. Es muss also möglich sein, dass Objekte einer Konstruktion für „eine Weile“ verschwinden, um später (an eventuell anderer Position) wieder zu erscheinen. Ferner werden wir noch sehen, dass man auch an die Art der erlaubten Wege der Eingangsparameter recht strenge Forderungen stellen muss, um quasi-stetige Wege der abhängigen Objekte zu erhalten.

Grundforderung 4 (Kontinuität): Für eine Konstruktion sollen unter einem linearen Weg der freien Elemente die Wege der abhängigen Elemente keine nichthebbaren Unstetigkeiten enthalten.

Mit den bisher eingeführten Begriffen können wir diese Forderung folgendermaßen formalisieren:

Definition 3.8 Es sei (Z, o) eine Konstruktion mit Startinstanz o und \mathcal{D} ein zugehöriges formales DGS. \mathcal{D} heiße kontinuierliches formales DGS wenn die folgende Forderung erfüllt ist: Für jeden quasi-linearen Weg $\varphi \in \Phi_{f(Z, o)}$ mit Definitionsintervall I' gibt es quasi-stetige Wege $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n$ auf I' mit der folgenden Eigenschaft $\varphi_i(t) = \varphi_i^{\mathcal{D}}(t)$ für alle $t \in I'$ mit $\varphi_i^{\mathcal{D}}(t) \neq *$.

In einem kontinuierlichen DGS dürfen also bei linearer Bewegung der freien Elemente die abhängigen Elemente keine unstetigen Sprünge durchführen. Sie dürfen aber für ein ganzes Intervall der Bewegung den Zustand *nicht-durchführbar* annehmen, um dann an anderer Stelle wieder aufzutau-chen. Die obige Definition suggeriert zwar, dass während eines solchen Intervalls den Elementen auch noch reale Entsprechungen $\varphi_i(t)$ zugeordnet werden könnten. Dies ist allerdings im Allgemeinen nicht der Fall, sondern ein rein technisches Hilfsmittel. Später werden wir sehen, dass sich solche Entsprechungen in der Tat finden lassen, aber nur über komplexen Zahlenbereichen.

Es mag zunächst befremdlich erscheinen, dass in der Definition von Kontinuität lediglich das Verhalten auf quasi-linearen Wegen und nicht auf quasi-stetigen Wegen als Eingangsvariation berücksichtigt wird. Würde die Definition aber auf allgemeinen quasi-stetigen Wegen aufbauen, so könnten wir nicht erwarten, dass es überhaupt nicht-triviale kontinuierliche formale DGS gibt, wie die Überlegungen in Abschnitt 5 zeigen. Zudem schränkt uns die geforderte Linearität unter praktischen Aspekten nicht ein, da wir sowieso die vom Computer erfasste diskrete Folge von Mauspositionen interpolieren müssen, und es ist sowohl problemlos als auch gerechtfertigt, dies durch stückweise lineare Funktionen zu tun.

¹¹Diese Forderung erscheint nicht nur Mathematikern als „natürlich“. Dies liegt daran, dass kontinuierliches Verhalten dem entspricht, was wir in der Natur beobachten. Normalerweise – auf der makroskopischen Ebene – verschwindet ein Objekt nicht plötzlich, um an anderer Stelle wieder aufzutauchen. Tatsächlich scheint Kontinuität eine Grundbedingung dafür zu sein, mit einem DGS einfaches physikalisches Verhalten zu modellieren.

4 Kontinuität

Die Forderung nach Stetigkeit wie in Grundforderung 4 und der letzten Definition ist sehr stark, und lässt sich nur erfüllen, wenn die Grundoperationen in gewisser Weise „gutartig“ sind. Notwendig ist natürlich, dass die Grundoperationen selbst keinerlei Unstetigkeitsstellen aufweisen. Dies ist aber nicht hinreichend, und tatsächlich muss gefordert werden, dass die Grundoperationen durch *algebraische Funktionen* darstellbar sind. Dann und genau dann gelingt *immer* die Beschreibung eines kontinuierlichen formalen DGS. Die folgenden Ausführungen sollen diesen Umstand herausarbeiten.

4.1 Algebraische Grundoperationen

Wir untersuchen nun, welche Bedingungen an Grundoperationen zu stellen sind, so dass sich zu *jedem* Konstruktion/Startinstanz-Paar eine *kontinuierliches* formales DGS finden lässt. Die dazu nötigen Restriktionen sind relativ schwach und werden von praktisch allen gängigen Grundoperationen auf Punkten, Geraden und Kreisen erfüllt. Für die folgende Definition arbeiten wir auf der Ebene von homogenen Parameterdarstellungen der Mengen \mathbf{P} , \mathbf{G} und \mathbf{K} in \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^4 .

Definition 4.1 *Es sei $\omega \in I_1 \times \dots \times I_k \times O$ eine Grundoperation. Gibt es Polynome $F_1, \dots, F_j \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$, m passend, so dass für alle Eingabeobjekte $(o_1, \dots, o_k, o) \in I_1 \times \dots \times I_k \times O$ mit zugehörigen Parametern $\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k, \bar{o}$ aus \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^4 gilt, dass*

$$(o_1, \dots, o_k, o) \in \omega \iff [F_i(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k, \bar{o}) = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, j],$$

so nennen wir ω algebraisch.

Eine algebraische Grundoperation lässt sich also als Nullstellenmenge eines polynomialen Gleichungssystems beschreiben. Wegen der Parametrisierung über homogenen Koordinaten können wir zusätzlich davon ausgehen, dass die Polynome selber homogen in den Koordinaten der beteiligten Objekte sind, es gilt also mit $F_i(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k, \bar{o}) = 0$ auch $F_i(\lambda_1 \bar{o}_1, \dots, \lambda_k \bar{o}_k, \lambda \bar{o}) = 0$ für $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda \in \mathbb{R}$. Wie schon in Abschnitt 2.3 beschrieben, sind Grundoperationen normalerweise derart, dass sie, außer in degenerierten Situationen, zu gegebenen Eingabeobjekten nur eine endliche Anzahl von möglichen Ausgabeobjekten gestatten. Auf homogene Gleichungssysteme übertragen heißt dies, dass bis auf degenerierte Situationen für gegebene Eingangswerte $\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k$ die Lösungsmenge

$$L_\omega(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k) := \{ \bar{o} \mid F_i(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k, \bar{o}) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, j \}$$

aus nur endlich vielen Geraden¹² durch den Ursprung besteht. Jede dieser Geraden entspricht hierbei einem einzigen Objekt in der Ausgabemenge von ω . Die Menge vom möglichen Eingabewerten für die diese Endlichkeitsbedingung nicht zutrifft bildet eine Untervarietät des Raumes der Eingangsparameter. Algebraische Grundoperationen, die für fast jede Wahl der Eingabeparameter die Endlichkeitsbedingung erfüllen nennen wir *diskrete algebraische Grundoperationen*. Die Anzahl der Geraden in $L_\omega(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k)$ nennen wir deren *homogene Mächtigkeit* und bezeichnen sie mit $|L_\omega(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k)|_h$.

¹²Geraden im \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^4 , nicht aus \mathbf{G}

Beispiele: Die üblicherweise betrachteten Objekte eines DGS (Geraden, Kreise, Kegelschnitte, Algebraische Kurven) lassen sich als Lösungsgebilde von Polynomen charakterisieren, also sind Schnittoperationen zwischen derartigen Gebilden algebraische Grundoperationen. Ebenso lassen sich Operationen wie Mittelpunkt, Winkelhalbierende, Senkrechte, Parallele als Lösungsmengen von Polynomgleichungen niederschreiben. Nicht-algebraisch ist hingegen die Abstandsfunktion zweier Punkte, wenn man nur positive Abstände zulässt. Sie wird allerdings sofort algebraisch, wenn man zu jedem Abstand d auch noch $-d$ als Ausgabewert zulässt.¹³

Der Übergang von allgemeinen Grundoperationen zu diskreten algebraischen Grundoperationen ermöglicht eine überaus wichtige Erweiterung der Sichtweise auf Konstruktionen und DGS. Genau wie man beim Studium von Polynomen ein viel besseres Verständnis für die tieferen Zusammenhänge erhält, wenn man vom reellen Zahlenkörper auf die komplexen Zahlen übergeht, ist dies auch für DGS der Fall. Ein univariates Polynom vom Grad d über \mathbb{R} hat zum Beispiel nicht notwendig eine Nullstelle über \mathbb{R} , wohl aber im algebraischen Abschluss \mathbb{C} , unter Berücksichtigung der Vielfachheiten sogar d Stück. Genauso ist die Grundoperation „Schnitt von Kreis und Gerade“ in der reellen Menge \mathbb{P} nicht durchführbar, wenn Gerade und Kreis sich nicht schneiden, das dazugehörige polynomiale Gleichungssystem lässt aber dennoch komplexe Lösungen zu. Die Erweiterung der Betrachtungen auch auf komplex koordinatisierte Objekte gibt uns ein in sich geschlosseneres Bild der durch eine Konstruktion gegebenen Situation. Wir können sogar konsequenterweise als Eingangsgrößen für die freien Elemente einer Konstruktion komplexe Koordinaten zulassen. Die Grundoperationen bleiben immer noch algebraisch sinnvoll durchführbar.

Zunächst benutzen wir diese Erweiterung des begrifflichen Horizonts, um uns ein genaueres Bild von den nicht-degenerierten Situationen einer einzelnen Grundoperation zu machen. Es sei also ω eine diskrete algebraische Grundoperation und F_1, \dots, F_k das dazu gehörige Polynomsystem. Ein Eingabewert $(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k)$ heiße *nicht-degeneriert* auf ω falls für jede Wahl der Eingabewerte in einer hinreichend kleinen Umgebung von $(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k)$ die Zahl $|L_\omega(\bar{o}_1, \dots, \bar{o}_k)|_h$ endlich ist, wobei wir komplexe Lösungen in die Zählung einbeziehen. Es lässt sich (als eine Folge des Satzes von Bézout) zeigen, dass diese Zahl für alle nicht-degenerierten Werte des gleichen Gleichungssystems konstant ist. Wir nennen diese Zahl die *Bézout-Zahl* der Grundoperation. Der Schnitt zweier Geraden hat Bézout-Zahl 1, der Schnitt zweier Kegelschnitte hat Bézout-Zahl 4. Der Schnitt zweier Kreise hat ebenso Bézout-Zahl 4, wenngleich auch zwei der möglichen Schnittpunkte immer komplex sind.¹⁴

Für eine ausführliche Darlegung der Zusammenhänge von Polynomen und der Mächtigkeit von Lösungsgebilden verweisen wir auf *Brieskorn/Knörrer (1981)*. Eine genauere Analyse der algebraischen Struktur diverser geometrischer Grundoperationen, insbesondere unter der Einbeziehung komplexer Lösungen, findet sich in *Kortenkamp/Richter-Gebert (2000b)*. Eine zu ω gehörende Relation $\tilde{\omega}$ (welche auch nicht-darstellbare Elemente einbezieht) sollte sowohl in degenerierten Situation als auch wenn die Zahl der reellen Lösungen kleiner als die Bézout-Zahl ist, die Ausgabe * ermöglichen, um eventuelle komplexe Lösungen als „nicht-darstellbar“ zu kennzeichnen, allerdings auch nur dann, da sonst das jetzt folgende Hauptresultat trivial wird.

¹³Allgemein können Grundoperationen, die Orientierungsinformation verwenden, nicht algebraisch sein. Die stetige Behandlung von Orientierungsinformation ist ein Problem für sich, welches wir in diesem Artikel nicht weiter ansprechen.

¹⁴Wir können jeden Schnitt zweier Kreise in das Auffinden der „Radikalgerade“ der beiden Kreise (Bézout-Zahl 1) gefolgt von einer Schnittoperation zwischen dieser Gerade und einem der Kreise zerlegen. Wir vermeiden somit das Erzeugen unnötiger komplexer Schnittpunkte.

Ist eine Konstruktion Z nur aus freien Elementen und diskreten algebraischen Grundoperationen aufgebaut, so nennen wir eine Instanz von Z nicht-degeneriert, wenn die Eingabeparameter jedes beteiligten Konstruktionsschrittes nicht-degeneriert sind. Die Parameter der Instanzen einer solchen Konstruktion ergeben sich aus den möglichen Lösungen des polynomialen Gleichungssystems, welches durch Vereinigung aller Gleichungssysteme der einzelnen Konstruktionsschritte entsteht. Somit ist letztlich die Parametermenge, welche Instanzen einer Konstruktion induziert, eine algebraische Varietät. Eine Konstruktion stetig zu verändern entspricht dem stetigen „Navigieren“ auf dieser Varietät.

Theorem 4.2 *Ist eine Konstruktion Z nur aus freien Elementen und diskreten algebraischen Grundoperationen aufgebaut und ist o eine nicht-degenerierte Instanz von Z , so gibt es zu (Z, o) ein kontinuierliches formales DGS.*

Was müssen wir für dieses Theorem überhaupt beweisen, und wo liegt die Schwierigkeit? Ein kontinuierliches formales DGS fordert die Existenz quasi-stetiger Wege für die abhängigen Elemente, sofern die Eingangparameter quasi-linear verändert werden. Dies ist trivialerweise lokal immer dann möglich, wenn die Ausgabe $*$ als Ergebnis für die abhängigen Elemente zur Verfügung steht. Der zu vermeidende Fall muss also wie folgt beschrieben werden: Zu einer Grundoperation $\tilde{\omega}$ bezeichne A_x , $x \in [0, 1]$ die Menge der möglichen Ausgabewerte an der Stelle x für einen gegebenen quasi-linearen Weg, der an der Stelle $t \in I \setminus I'$ punktiert ist. Wir betrachten nun A_x in einer Umgebung $U_\varepsilon(t)$ und nehmen an, dass bis $t - \varepsilon$ bereits ein quasi-stetiger Weg gefunden wurde. Wenn für A_x mit $x \in U_\varepsilon(t) \cap \{x \mid x > t\}$ gilt, dass $*$ nicht in A_x enthalten ist, so muss dieser quasi-stetige Weg über t hin fortgesetzt werden, und zwar durch Elemente aus den A_x , und die Punktierung muss, um Bedingung (ii) aus Theorem 3.3 zu erfüllen, *chordal*, also auf der Riemannschen Zahlenkugel, stetig durch den Grenzwert des bekannten Wegstücks vor t gehoben werden.

Man sollte den Beweis also unter dem Aspekt, dass nicht nach Belieben das $*$ -Element zugeordnet werden kann, lesen. Ansonsten können wir schlimmstenfalls sogar jede Sprungstelle durch Auslöschten der abhängigen Elemente in einer Umgebung „entschärfen“ – damit wäre ein beliebiges Springen der Ausgabeelemente erlaubt (und quasi-stetig!). Wir werden später sehen, dass die hinter den Konstruktionen verborgene komplexe Struktur auch in seltenen Fällen das Fortführen eines bestimmten Lösungszweiges mathematisch als wenig sinnvoll erscheinen lassen, obwohl auf den ersten Blick eine stetige Fortsetzung existiert, siehe dazu auch Abschnitt 5 und die in 4.2.1 folgenden Betrachtungen über globale Konsistenz.

BEWEIS VON THEOREM 4.2. Wir müssen zeigen, dass es für jeden von o ausgehenden quasi-linearen Weg der freien Elemente eine stetige und mit der Konstruktion konsistente Fortführung der abhängigen Elemente gibt. Wir führen unsere Überlegungen vollständig auf der Ebene der beteiligten Parameter durch. Die Konsistenz mit unseren Konzepten auf Instanzenebene ergibt sich direkt aus den Definitionen. Wir fassen für die folgenden Überlegungen die Parameter der freien Elemente zu einem einzigen Punkt in einem hochdimensionalen Raum \mathbb{C}^n auf, komplexe Eingabewerte seien also gestattet. Entsprechend fassen wir die Koordinaten der abhängigen Elemente als Punkt in einem Raum \mathbb{C}^m auf. Ein linearer Weg ψ im Kontrollraum \mathbb{C}^n lässt sich nun schreiben als $\psi(t) := t \cdot B + (1 - t) \cdot A$ wobei $A \in \mathbb{C}^n$ die Startposition und $B \in \mathbb{C}^n$ die Endposition angibt. Für festes t ergeben sich dann die potentiellen Parameterwerte der abhängigen Objekte als Lösungsgebilde unseres Gleichungssystems. Es sei $K \subset \mathbb{C}$ der Körper aller komplexen Zahlen, die algebraisch abhängig von den Einträgen in den Vektoren A und B sind.

Zu den durch die Grundoperationen der Konstruktion gegebenen Polynomen fügen wir nun noch für jedes abhängige Objekt eine affine Gleichung in unser System hinzu, welche erzwingt, dass dessen Koordinatenvektor auf einer affinen Ebene liegt (also z.B. für einen Punkt mit den homogenen Koordinaten (x, y, z) die Gleichung $h_x x + h_y y + h_z z = 1$). Diese zusätzlichen Gleichungen verändern nichts an der geometrischen Interpretation der Grundoperationen. Sie sorgen lediglich dafür, dass im Allgemeinen der Parametervektor eines Objektes *dehomogenisiert* wird, d.h., dass es zu dem Objekt nur noch *einen* repräsentierenden Koordinatenvektor gibt. Um zu bewirken, dass diese Hyperebenen für unsere nachfolgenden Betrachtungen in hinreichend allgemeiner Lage sind, wählen wir $h_x, h_y, h_z \in \mathbb{C} \setminus K$, also algebraisch unabhängig von den in den Vektoren A und B vorhandenen Einträgen. Für eine gegebene nicht-degenerierte Wahl von $t \in K$, ergeben sich somit nur endlich viele Punkte im \mathbb{C}^m , die alle Polynome in unserem System gleichzeitig erfüllen. Dies gilt selbst noch in einer hinreichend kleinen Umgebung $U_\varepsilon(t)$.

Verträglich zur Startinstanz wählen wir nun für die abhängigen Elemente einen Punkt $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ in \mathbb{C}^m aus, der im Lösungsgebilde des polynomialen Gleichungssystems liegt. Die Tatsache, dass o nicht-degeneriert war, bewirkt, dass $(\psi_1(0), \dots, \psi_n(0), \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ keine Singularität und kein Verzweigungspunkt des Lösungsgebildes ist. Verändern wir nun t stetig, so können wir $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ als Keime von Zweigen analytischer Funktionen $\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)$ auffassen. Da diese Funktionen die Lösungsgebilde eines polynomialen Gleichungssystems darstellen, sind alle $\alpha_i(t)$ analytische Funktionen mit endlich vielen Singularitäten oder Verzweigungspunkten. Die auftretenden Singularitäten sind entweder hebbar, oder Polstellen. Nicht-isolierte Singularitäten können nicht auftreten, da alle beteiligten Funktionen algebraisch sind.

Wäre nun der Pfad $\psi(t)$ derart, dass die $\alpha_i(t)$ bei analytischer Fortsetzung keinen Verzweigungspunkt treffen, so könnten wir die Funktionen $\alpha_i(t)$ einfach durch analytische Fortsetzungen bestimmen. Diese Funktionen und auch Quotienten solcher Funktionen wären dann notwendig stetig auf der Riemannschen Zahlenkugel, und würden ein stetiges Verhalten der abhängigen Objekte in \mathbb{P} , $\tilde{\mathbb{G}}$ und $\tilde{\mathbb{K}}$ gemäß Definition 3.7, Definition 3.1 und Theorem 3.3 induzieren. Leider können wir nicht davon ausgehen, dass kein Verzweigungspunkt getroffen wird, da durch die Forderung, dass t das *reelle* Intervall $[0, 1]$ durchläuft, oftmals der Weg zwangsläufig durch Verzweigungspunkte der Funktionen $\alpha_i(t)$ geführt wird.¹⁵

Um dies zu „umgehen“ – im wahrsten Sinne des Wortes – nutzen wir den komplexen Parameterbereich aus und lassen für t beliebige Werte in \mathbb{C} zu. Da wir beim Auftreten mehrerer Verzweigungspunkte das Intervall $[0, 1]$ in mehrere Teilintervalle unterteilen und ψ aus mehreren umparametrisierten Teilwegen zusammensetzen können, die je nur einen Verzweigungspunkt enthalten, können wir den Beweis auf die Behandlung eines Verzweigungspunkt $t' \in [0, 1]$ reduzieren. Die Stelle t' muss algebraisch abhängig von den Einträgen in A und B sein, da t' sich aus diesen durch algebraische Operationen (inklusive der Nullstellenberechnung von Polynomen) berechnen lässt. Durch die Wahl der affinen Schnitthyperebenen können wir davon ausgehen, dass t' nicht gleichzeitig eine der Polstellen der $\alpha_i(t)$ ist. Durch schrittweises Auflösen des Gleichungssystems (z.B. durch iterative Anwendung von Resultanten) erhalten wir Polynome $q_i \in \mathbb{C}[t, \alpha_i]$, welche implizit die Abhängigkeit der α_i von t durch $q_i(t, \alpha_i) = 0$ beschreiben.

Wir erzeugen nun den gewünschten von t durchlaufenen Weg entlang des Intervalls $[0, 1]$ durch stetige Verformung eines singularitätenfreien Weges. Wir betrachten hierzu die Funktion $t(\varepsilon, \tau) =$

¹⁵Zieht man beispielsweise eine Gerade, die einen Kreis schneidet, aus dem Kreis heraus, so durchlaufen die Koordinaten der Schnittpunkte einen Verzweigungspunkt in der Tangentialsituation.

$\tau + i \cdot \varepsilon \cdot \tau \cdot (1 - \tau)$. Durchläuft τ das reelle Intervall $[0, 1]$, so beschreibt für feste ε die Funktion $t(\varepsilon, \tau)$ einen Bogen durch \mathbb{C} von 0 nach 1. Für $\varepsilon = 0$ läuft $t(\varepsilon, \tau)$ auf der reellen Gerade. Für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ können die Funktionen $\alpha_i(t)$ entlang $t = t(\varepsilon, \tau)$ aus dem Keim $\alpha_i(0)$ heraus analytisch fortgesetzt werden, da keine Verzweigungspunkte getroffen werden. Wir müssen zeigen, dass die auf den abhängigen Objekten induzierten Pfade im Grenzübergang keine unstetigen Sprünge induzieren. Da die Werte der α_i die *homogenen* Koordinaten der abhängigen Objekte darstellen, müssen wir (nach Definition 3.1 und Theorem 3.3) zeigen, dass im Grenzübergang die Koordinaten-Quotienten $\alpha_i(t)/\alpha_j(t)$ chordal stetige (d.h. auf der Riemannschen Zahlenkugel stetige) Funktionen sind. Hierzu genügt es zu zeigen, dass die durch $\psi(t(\varepsilon, \tau))$ und $\varepsilon \rightarrow 0$ gegebene Verformung des Weges in einen Verzweigungspunkt hinein keine Unstetigkeiten des betrachteten Quotienten verursacht.

Da die $\alpha_i(t)$, implizit gegeben durch die Polynome $q_i(t, \alpha_i)$, Zweige algebraischer Funktionen sind, besitzen diese im Verzweigungspunkt t' eine Auflösung in Form einer Puiseux-Folge. Das heißt, es gibt ein $p \in \mathbb{N}$, so dass in einer Umgebung von t' die mehrblättrige Funktion $\alpha_i(t)$ als

$$\alpha_i(t) = \sum_{k=0}^r a_k (t - t')^{\frac{k}{p}}$$

geschrieben werden kann (Brieskorn/Knörrer 1981, Kapitel 8). Die ganze Mehrdeutigkeit von $\alpha_i(t)$ um t' ist in dem Ausdruck $(t - t')^{\frac{1}{p}}$ „gekapselt“. Umläuft man mit t den Verzweigungspunkt t' in einer kleinen Umgebung p mal und verfolgt dabei $\alpha_i(t)$ durch analytische Fortsetzung, so legt $\alpha_i(t)$ einen geschlossenen Weg zurück. Analog schreiben wir

$$\alpha_j(t) = \sum_{k=0}^{r'} b_k (t - t')^{\frac{k}{q}}.$$

Wie verhält sich nun der Quotient $\alpha_i(t)/\alpha_j(t)$? Um dies zu sehen, substituieren wir $z(t) = (t - t')^{\frac{k}{p \cdot q}}$. Die Wege $\psi(t(\varepsilon, \tau))$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$ induzieren eine Verformung des Weges $z(t)$ in den Nullpunkt hinein. Der Quotient

$$\frac{\alpha_i(t)}{\alpha_j(t)} = \frac{\sum_{k=0}^r a_k z(t)^{qk}}{\sum_{k=0}^{r'} b_k z(t)^{pk}}$$

ist nun Quotient zweier Polynome und ist somit auch im Punkt $t = t'$ chordal stetig. Dies zeigt, dass im Grenzübergang die induzierten Wege der abhängigen Objekte stetig in \mathbb{C}^m sind. Werden die homogenen Koordinaten der abhängigen Objekte komplex, wird in $\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{G}}, \tilde{\mathbb{K}}$ das jeweilige *-Element induziert. Ist ein abhängiges Objekt für $t < t'$ reell, so geht dessen Pfad entweder stetig in einen reellen Pfad für $t > t'$ über, oder die Parameter werden auf einem ganzen Intervall komplex und induzieren das *-Element. Ein unstetiges Springen ist bei den durch stetige Verformung erzeugten Pfaden nicht möglich. Dies beweist Theorem 4.2. \square

4.2 Interpretation dieses Resultates

Das Ergebnis und die Überlegungen des letzten Abschnitts können auf vielfältige Art und Weise interpretiert werden. Einerseits bedeutet es, dass das auf einem Computerbildschirm gezeigte reelle Verhalten eines DGS nur ein unvollständiges Bild des gesamten mathematischen Inhaltes einer Konstruktion angibt. Insbesondere „verschwindende Schnitte“ (z.B. von disjunkten Geraden und

Kreisen) beinhalten wesentlich mehr Information, als man wahrnimmt. Will man ein stetiges und konsistentes Verhalten eines (realen) DGS erreichen so sollten diese Elemente, obwohl sie nicht angezeigt werden, als „komplexe Schatten“ mitgeführt werden.

Ferner sagt uns dieses Ergebnis, dass bei einer Bewegung im Zugmodus eines DGS bei stetigem Verhalten nicht nur die Endsituation über die gezeigte Instanz bestimmt. Vielmehr hat der Weg, den man von einer Startsituation aus nimmt, entscheidenden Einfluss. Dies stimmt sogar dann noch, wenn die komplette Bewegungssituation auf *einen* Parameter t reduziert worden ist. Selbst dann entscheidet immer noch die relative Windungszahl in \mathbb{C} des Weges von t um die Verzweigungspunkte über die erreichte Endinstanz. Gleichzeitig liegt in der genauen Wahl dieses Weges auch eine gewisse Freiheit mit, der man das Verhalten eines DGS entscheidend modellieren kann. Das im Beweis zum Theorem 4.2 betrachtete Verfahren der stetigen Verformung analytischer Wege stellt also *eine* Methode zum Erzeugen konsistenter Entscheidungen für die einzelnen Parameterfunktionen der abhängigen Elemente dar.

4.2.1 Globale Konsistenz

Der von uns im Beweis beschriebene Grenzübergang bewirkt gewissermaßen eine gezielte Auswahl des Zweiges, auf dem nach Durchlaufen eines Verzweigungspunktes weitergelaufen werden soll. Da der Steuerparameter t für alle Teile der Konstruktion *gleichzeitig* benutzt wird, und auch der Grenzübergang für alle Konstruktionsteile *gleichzeitig* durchgeführt wird, erreichen wir damit aber auch eine gewisse globale Konsistenz.

Definition 4.3 Ein für (Z, o) angegebenes kontinuierliches formales DGS \mathcal{D} heißt global konsistent, wenn sich für jedes (Z, o) umfassende Konstruktion/Startinstanz-Paar (Z', o') das Verhalten von \mathcal{D} zu einem kontinuierlichen DGS \mathcal{D}' für (Z', o') ergänzen lässt.

Es ist durchaus möglich, für bestimmte Paare (Z, o) kontinuierliche DGS anzugeben, die nicht global konsistent sind. Dies geht immer dann, wenn die zugehörige Konstruktion in verschiedenen Teilen der Konstruktion an der gleichen Stelle des Parameterraumes Verzweigungspunkte aufweist, die nicht direkt voneinander konstruktiv abhängen. Hier könnte man prinzipiell in beiden Teilen unterschiedliche Entscheidungen treffen, die der Kontinuität nicht direkt widersprechen. Erst eine weitere Ergänzung der Konstruktion könnte eine mathematische Unstimmigkeit offenlegen.

Das Theorem des letzten Kapitels lässt sich dahingehend verschärfen, dass man auch noch globale Konsistenz fordert.

Theorem 4.4 *Das im letzten Abschnitt konstruierte formale DGS ist global konsistent.*

BEWEIS. Zum Beweis muss man lediglich beachten, dass bei der Konstruktion der durchlaufenen Pfade im Beweis von Theorem 4.2 die Konstruktion immer als Ganzes betrachtet wurde, und nie die aktuelle Konstruktionsreihenfolge betrachtet wurde. Dieselben Wege würden also auch bei einer die Konstruktion Z umfassenden größeren Konstruktion Z' erzeugt werden. \square

In gewisser Weise ist unser Verfahren also „vorausschauend“. Die Entscheidungen werden so getroffen, dass auch *nachher* gemachte Konstruktionsschritte kein Springen verursachen können.

4.2.2 Theorem-invarianz

Eine weitere Eigenschaft des im Abschnitt 4.1 vorgestellten Verfahrens ist *Theorem-invarianz*: Eine einmal in einer Umgebung einer Startinstanz als wahr identifizierte algebraische Eigenschaft kann durch Bewegungen des DGS nicht wieder zerstört werden. Unter einer algebraischen Eigenschaft verstehen wir hierbei eine Eigenschaft, die sich als Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms charakterisieren lässt. Typische algebraische Eigenschaften sind z.B. „drei Punkte sind kollinear“, „drei Punkte liegen auf einer Geraden“ oder „drei Geraden treffen sich oder sind parallel“.

Theorem 4.5 *Es sei Z eine Konstruktion, o eine nicht-degenerierte Instanz von Z , $U_\epsilon(o)$ eine Umgebung von o und E eine algebraische Eigenschaft, die auf $U_\epsilon(o) \cap \mathbb{I}_Z$ gilt. Das im letzten Abschnitt konstruierte formale DGS \mathcal{D} hat die Eigenschaft, dass E auf jeder in \mathcal{D} durch einen quasi-linearen Weg erreichbaren Instanz gilt.*

BEWEIS. Es sei F das Polynom, welches E repräsentiert, und φ ein quasi-linearer Weg der freien Elemente in Z . Das Polynom F ist insbesondere eine analytische Funktion und verschwindet auf einem Initialstück von φ . Also muss es die 0-Funktion sein. \square

Es können natürlich auch mehrere quasi-lineare Wege theorem-invariant miteinander verkettet werden, sofern die Zwischenstationen (beim Wechsel von einem Weg auf den nächsten) keine degenerierten Instanzen sind.

Insbesondere bedeutet Theorem 4.5, dass wir bei einer Konstruktion wie dem Winkelhalbierenden-satz aus der Einleitung gewährleisten können, dass das Theorem „durch Ziehen nicht kaputt geht“, obwohl insgesamt drei Mehrdeutigkeitsentscheidungen unabhängig voneinander getroffen werden müssen. Mehr noch, Theoreme bleiben auch über Phasen, in denen Operationen nicht (reell) ausführbar sind, bestehen.¹⁶

Der wohl wichtigste Aspekt dieses Satzes ist, dass er erstmalig einen soliden Theorembegriff in die Welt dynamischer Geometrie einführt: *Ein Theorem ist eine algebraische Eigenschaft, die auf einer Umgebung einer Instanz wahr ist.* Das Verhalten eines auf Basis von Theorem 4.2 robust implementierten DGS sichert, dass Theoreme dieser Art auch unter Bewegungen konsistent erhalten bleiben. Insbesondere lassen sich basierend auf diese Begriffsbildung randomisierte Beweisverfahren angeben, die durch das Erzeugen von *vielen, genügend zufälligen* Instanzen ein Theorem bis zu einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit beweisen können (vgl. Kortenkamp 1999, Kortenkamp/Richter-Gebert 2000a, Tulone/Yap/Li 2000).

Bemerkung: Theorem 4.5 stellt gewissermaßen eine moderne Version des von *Poncelet (1822)* formulierten Kontinuitätsprinzips dar, welches mit dem Satz „Eine auf einer Umgebung als gültig erkannte Schnitteigenschaft einer geometrischen Figur muss als allgemeingültig anerkannt werden (selbst wenn einige der Konstruktionselemente in einigen Situationen nicht sichtbar sind)“ wiedergegeben werden kann. Zu Recht formulierte *Klein (1928)*, dass es sich bei dieser zu Poncelets Zeiten fast metaphysisch anmutenden Vorstellung um eine Tatsache handelt, die die direkte Folge des globalen Verhalten analytischer Funktionen ist: Verschwindet eine analytische Funktion auf einer dichten Menge, so verschwindet sie bereits überall.

¹⁶Ein schönes Beispiel für einen solchen Satz ist das Theorem, dass sich die paarweisen Radikalachsen dreier Kreise in einem Punkt treffen.

4.2.3 Diskretisierung vs. Kretisierung

Die Umsetzung der theoretischen Resultate über kontinuierliche formale DGS in eine konkrete Implementierung ist nicht trivial. Das Projekt *Cinderella* (Richter-Gebert/Kortenkamp 1999) stellt einen Versuch dar, so weit wie möglich an die theoretische Idealisierung heran zu kommen. Erfreulicherweise gibt es aber auch Effekte, die die Situation gegenüber der in Theorem 4.2 vereinfachen.

Der dort beschriebene Grenzübergang muss in der Praxis nie durchgeführt werden. Bewegt man mit der Maus in einer Konstruktion ein freies Element, erhält der Computer keine stetige Funktion einer Bewegung als Eingabe, sondern eine diskrete Folge von Stützstellen. Der Übergang von dieser diskreten Folge von Stützstellen zu einer kontinuierlichen Funktion, eine *Kretisierung*,¹⁷ muss im Programm selbst gemacht werden. Hierbei genügt es, *irgendeine* Funktion anzugeben, die die Stützstellen in der angegebenen Reihenfolge durchläuft. Diese kann von vorneherein so angelegt sein, dass sie die Verzweigungspunkte der Funktion höchstwahrscheinlich nicht trifft. Da kleine Verformungen – die keine neuen Verzweigungspunkte einfangen – des Weges das Endresultat nicht beeinflussen, besteht hier eine beträchtliche Freiheit, die sich in der Implementierung ausnutzen lässt. *Cinderella* erzeugt für je zwei aufeinanderfolgende Stützstellen einen quasi-linearen Weg, bei dem der Kontrollparameter durchs Komplexe geführt wird.

4.2.4 Auflösen des Polynomgleichungssystems

Im Beweis von Theorem 4.2 gingen wir von dem sehr allgemeinen Modell algebraischer Grundoperationen aus. Dies führte uns zu der Beschreibung einer Konstruktion als polynomiales Gleichungssystem. Die Parameter der abhängigen Objekte konnten durch Lösen dieses Gleichungssystems gefunden werden.

Das Berechnen der abhängigen Elemente kann aber zumeist viel einfacher geschehen, da die meisten gebräuchlichen mehrdeutigen Operationen (z.B. Schnitt Gerade/Kreis, Winkelhalbierende, etc.) durch die vier Grundrechenarten und Quadratwurzeln direkt berechnet werden können. Einige weniger gebräuchliche Operationen, wie der Schnitt zweier Kegelschnitte, benötigen darüber hinaus Kubikwurzeln. Komplexere Nullstellengebilde treten im Allgemeinen bei derzeit marktüblichen DGS nicht auf. Die im Beweis von Theorem 4.2 behandelten Verzweigungspunkte treten dann immer an den Stellen auf, bei denen die Radikalausdrücke Nullstellen haben.

Erweitern wir allerdings den Objektumfang eines DGS von linearen und quadratischen Objekten und lassen auch Kurven dritten oder höheren Grades zu, so führt bereits der Schnitt einer solchen Kurve mit einem Kegelschnitt auf eine Polynomgleichung sechsten Grades, die nicht mehr explizit gelöst werden kann.

4.2.5 Algorithmische Komplexität

Es sei an dieser Stelle nur kurz erwähnt, dass die Fragestellung nach der Algorithmik der Wegverfolgung keineswegs trivial ist. Sie führt direkt ins Herz eingehender Untersuchungen aus der

¹⁷das Gegenteil von Dis-kretisierung

reellen Komplexitätstheorie (vgl. *Blum/Shub/Cucker/Smale 1998*). Bei den dort behandelten Pfadverfolgungsverfahren zum Lösen polynomialer Gleichungssysteme, so genannten *Homotopiemethoden*, stößt man auf Probleme der gleichen Art wie bei der Pfadverfolgung in DGS. So ist es im allgemeinen z.B. algorithmisch „genauso teuer“ zu versuchen, einen Verzweigungspunkt vorherzusagen, wie ihn korrekt zu durchwandern. Insbesondere kann man für geometrische Konstruktionen zeigen, dass allein die Beantwortung der Frage nach der korrekten Verfolgung eines gegebenen Pfades NP-schwer ist. Für eine ausführliche Darlegung dieser Aspekte verweisen wir auf *Richter-Gebert/Kortenkamp (2000)*.

5 Grenzen der Stetigkeit

Nachdem wir im letzten Kapitel gesehen haben, dass man ein kontinuierliches DGS konstruieren kann, sofern in einer Konstruktion ausschließlich algebraische Grundoperationen enthalten sind, zeigen wir nun, dass schon eine kleine Erweiterung der zulässigen Grundkonstruktionen zu diskontinuierlichem Verhalten führen kann.

Definition 5.1 *Es sei (Z, o) ein Konstruktion/Startinstanz-Paar. Eine (Z, o) umfassendes Konstruktion/Startinstanz-Paar (Z', o') , das nur durch Hinzufügen von Operationen vom Typ Freier Punkt, Verbindungsgerade, Schnitt Gerade/Gerade und Parallele erzeugt wurde, heißt eine schlichte Erweiterung.*

Definition 5.2 *Ein kontinuierliches formales DGS \mathcal{D} für (Z, o) heiße erweiterbar stetig, wenn sich für jede schlichte Erweiterung (Z', o') , das Verhalten von \mathcal{D} zu einem kontinuierlichen DGS \mathcal{D}' für (Z', o') ergänzen lässt.*

Erweiterbare Stetigkeit ist eine stark abgeschwächte Form von globaler Konsistenz, in der die für die Ergänzung erlaubten Grundoperationen keine neuen Mehrdeutigkeiten in die betrachtete Konstruktion einführen. Insbesondere ist das Verhalten von \mathcal{D}' durch das Verhalten von \mathcal{D} bereits eindeutig festgelegt. Die Inkompatibilität zur Stetigkeit liegt somit nicht im Verfolgen der hinzu konstruierten Elemente, sondern im ursprünglichen DGS selbst.

5.1 Von-Staudt-Konstruktionen

Wir wollen nun untersuchen, welche Möglichkeiten wir im Rahmen von *schlichten Erweiterungen* haben. Diese geben uns ein überraschend starkes Mittel um eine gegebene Konstruktion zu ergänzen und dies eventuell zu Widersprüchen zur Kontinuität zu führen. Insbesondere können wir mit Hilfe dieser Operationen auf geometrische Weise Addition und Multiplikation nachbilden.

Denken wir uns hierzu die Menge \mathbf{P} durch \mathbb{R}^2 (nicht-homogen) koordinatisiert. Die Punkte $p_0, p_1, p_x, p_y \in \mathbf{P}$ mit Koordinaten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(x, 0)$ und $(y, 0)$ seien gegeben. Die in Bild 2 angegebenen Konstruktionen (die klassischen *von-Staudt-Konstruktionen*, welche man benutzt, um ohne Koordinatisierung eine algebraische Struktur in den Projektiven Raum zu bringen) ermöglichen es, aus diesen Eingabepunkten neue Punkte mit Koordinaten $(x+y, 0)$ bzw. $(x \cdot y, 0)$ zu konstruieren. Ebenso ist zu gegebenen x auch die Konstruktion von $-x$ einfach durchführbar. Bei der Multiplikationskonstruktion kann man die Konstruktionsreihenfolge auch umkehren, indem man mit den Punkten

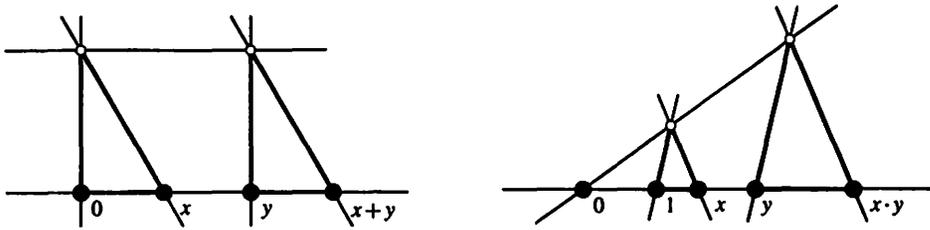


Abbildung 2: Von-Staudt-Konstruktionen für Addition und Multiplikation.

$p_0, p_1, p_x, p_{x \cdot y}$ startet und daraus den Punkt p_y konstruiert. Das algebraische Äquivalent hierzu ist die Division $y = z/x$ mit $z = x \cdot y$. Im Grenzfall $x \rightarrow 0$ wandert hierbei der Punkt p_y gegen Unendlich.

Durch Verkettung mehrerer von-Staudt-Konstruktionen kann jedes Polynom $f(x)$ „geometrisch berechnet“ werden. Legen wir die Punkte p_0 und p_1 auf der x -Achse fest, können wir also einen Punkt $p_{f(x)}$ konstruieren, welcher für die „Eingabe“ $p_x = (x, 0)$ den „Funktionswert“ $(f(x), 0)$ hat.

Als weitere einfache, aber wichtige, Grundkonstruktionen nennen wir noch die Extraktion von Koordinaten eines Punktes durch Parallelprojektion auf die x - bzw. y -Achse eines vorher festgesetzten Koordinatensystems. Ebenso einfach kann ein Punkt $(x, 0)$ auf einen Punkt mit Koordinaten durch Projektion senkrecht zu einer Diagonale des Koordinatensystems abgebildet werden. Zwei Punkte $(x, 0)$ und $(y, 0)$ können zudem zu einem Punkt (x, y) zusammengesetzt werden.

5.2 Nicht-algebraische Übergänge

Das nun folgende Theorem gibt ein Kriterium an, welches die Existenz eines erweiterbar stetigen DGS verhindert. Wir gehen davon aus, dass wir die Menge \mathbf{P} mit einem nicht-homogenen Koordinatensystem versehen haben, und $x(p)$ bezeichnet die x -Koordinate eines Punktes p .

Theorem 5.3 *Es sei \mathcal{D} ein formales kontinuierliches DGS für (Z, o) . Ferner sei (Z', o') eine schlichte Erweiterung von (Z, o) mit dazugehörigem durch \mathcal{D} induziertem formalem DGS \mathcal{D}' . Es seien $f(Z', o')$ die freien Elemente der Erweiterung Z' und $\varphi \in \Phi_{f(Z', o')}$ ein quasi linearer Weg. Der Weg $p(t) : I' \rightarrow \mathbf{P}$ sei der durch \mathcal{D}' und φ induzierte Weg eines abhängigen Punktes vom Z' . Gibt es nun ein $t' \in [0, 1]$ und ein $\varepsilon > 0$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) $x(p(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (t - t')^i$ für $t \in [t' - \varepsilon, t']$,
- (ii) $x(p(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (t - t')^i$ für $t \in [t', t' + \varepsilon]$,
- (iii) $(a_0, a_2, \dots) \neq (b_0, b_2, \dots)$,

dann ist \mathcal{D} nicht erweiterbar stetig.

BEWEIS. Wir müssen zeigen, dass wir eine schlichte Erweiterung von (Z', o') finden, die nicht stetig ist. Es sei i der kleinste Index mit $a_i \neq b_i$. Mittels von-Staudt-Konstruktionen berechnen wir das Polynom $w(t) = \sum_{i=0}^{i-1} a_i (t - t')^i$. Wir extrahieren die x -Koordinate des Punktes p und konstruieren $w'(t) := (x(p(t)) - w(t))(t - t')^i$. Der rechtsseitige Grenzwert von $w'(t)$ an der Stelle t ist a_i , der linksseitige Grenzwert ist $b_i \neq a_i$, also verhält sich der $w'(t)$ entsprechende Punkt unstetig. \square

Dieses Theorem mag unscheinbar erscheinen, es schränkt die möglichen Grundoperationen eines erweiterbar stetigen DGS aber stark ein. Weil $|x|/x$ an der Stelle 0 eine Sprungstelle hat, darf zum Beispiel die Betragsfunktion $|x|$ nicht aus Grundkonstruktionen zusammensetzbar sein. Dies verbietet es insbesondere, gemessene Entfernungen von Punkten zum Abtragen von Strecken zu verwenden, wenn diese Messungen den Absolutbetrag liefern. Erlaubt wäre es aber, das Quadrat der Abstandsfunktion zu messen und abzutragen, denn diese Funktion ist algebraisch. Oder man lässt die Mehrdeutigkeit der Abstandsfunktion zu, und nimmt die Quadratwurzel des Quadrates des gemessenen Abstandes, so der Abstand zweier Punkte sowohl d als auch $-d$ ist. Durch geeignete Wahl des passenden Zweiges lässt sich der Abstand dann nämlich immer analytisch fortsetzen. Selbst hochgradig glatte Funktionen können in einfachen Erweiterungen zu sprunghaftem Verhalten führen, wenn sie nicht überall unendlich oft differenzierbar sind. So kann man in einem erweiterbar stetigen DGS keine Funktion konstruieren, die sich für negative x wie x^{1000} und für positive x wie x^{1001} verhält, obwohl diese 1000 mal stetig differenzierbar ist.

5.3 Transzendente Funktionen

Eine weitere prinzipielle Hürde stellen Operationen dar, die zwar analytisch sind, aber nicht-isolierte Singularitäten aufweisen. Typischerweise entstehen diese, wenn man das Abtragen von Winkeln auf Längen oder umgekehrt zulässt. Dadurch lassen sich transzendente Funktionen wie etwa $\sin(x)$ konstruieren. Die Funktion $\sin(x)$ ist zwar fast überall analytisch, weist aber im Unendlichen eine nicht-isolierte Singularität auf, d.h. eine Singularität, die in jeder Umgebung unendlich viele Singularitäten hat. Unser Verfahren, den gewünschten Weg durch eine Singularität durch stetige Verformung zu approximieren, schlägt hier fehl, da die Homotopieklasse des Weges bei der Annäherung unendlich oft wechselt. Dennoch kann man mit den hier vorgestellten Verfahren über weite Strecken noch gut mit derartigen Funktionen umgehen, solange man keinen Weg durch eine nicht-isolierte Singularität verfolgen muss.

Literatur

- L. BLUM, F. CUCKER, M. SHUB & S. SMALE (1998): *Complexity and Real Computation*, Springer, New York.
- E. BRIESKORN & H. KNÖRRER (1981): *Ebene algebraische Kurven*, Birkhäuser Basel, Boston, Stuttgart.
- F. KLEIN (1928): *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Springer, Heidelberg.
- U. KORTENKAMP (1999): *Foundations of Dynamic Geometry*, Dissertation, ETH Zürich, <http://www.cinderella.de/papers/diss.pdf>.
- U. KORTENKAMP & J. RICHTER-GEBERT (2000a): *Decision complexity in Dynamic Geometry*, in: Proceedings of the ADG 2000, Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence 2061, to appear, <http://www.cinderella.de/papers/decisionComplexity.pdf>.
- U. KORTENKAMP & J. RICHTER-GEBERT (2000b): *Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie in Cinderella*, Journal für Mathematikdidaktik 21, 303–324, B.G. Teubner.
- J.-V. PONCELET (1822): *Traité des propriétés projectives des figures*, Gauthier-Villars.
- J. RICHTER-GEBERT & U. KORTENKAMP (1999): *The Interactive Geometry Software Cinderella*, Springer-Verlag Heidelberg, <http://www.cinderella.de>.
- J. RICHTER-GEBERT & U. KORTENKAMP (2000): *Complexity issues in Dynamic Geometry*, in: Proceedings of the Smalefest 2000 in honour of Steven Smales 70th birthday, <http://www.cinderella.de/papers/complexity.pdf>.
- D. TULONE, C. YAP, C. LI (2000): *Randomized Zero Testing of Radical Expressions and Elementary Geometry Theorem Proving*, in: Proceedings of the ADG 2000, Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence 2061, to appear.