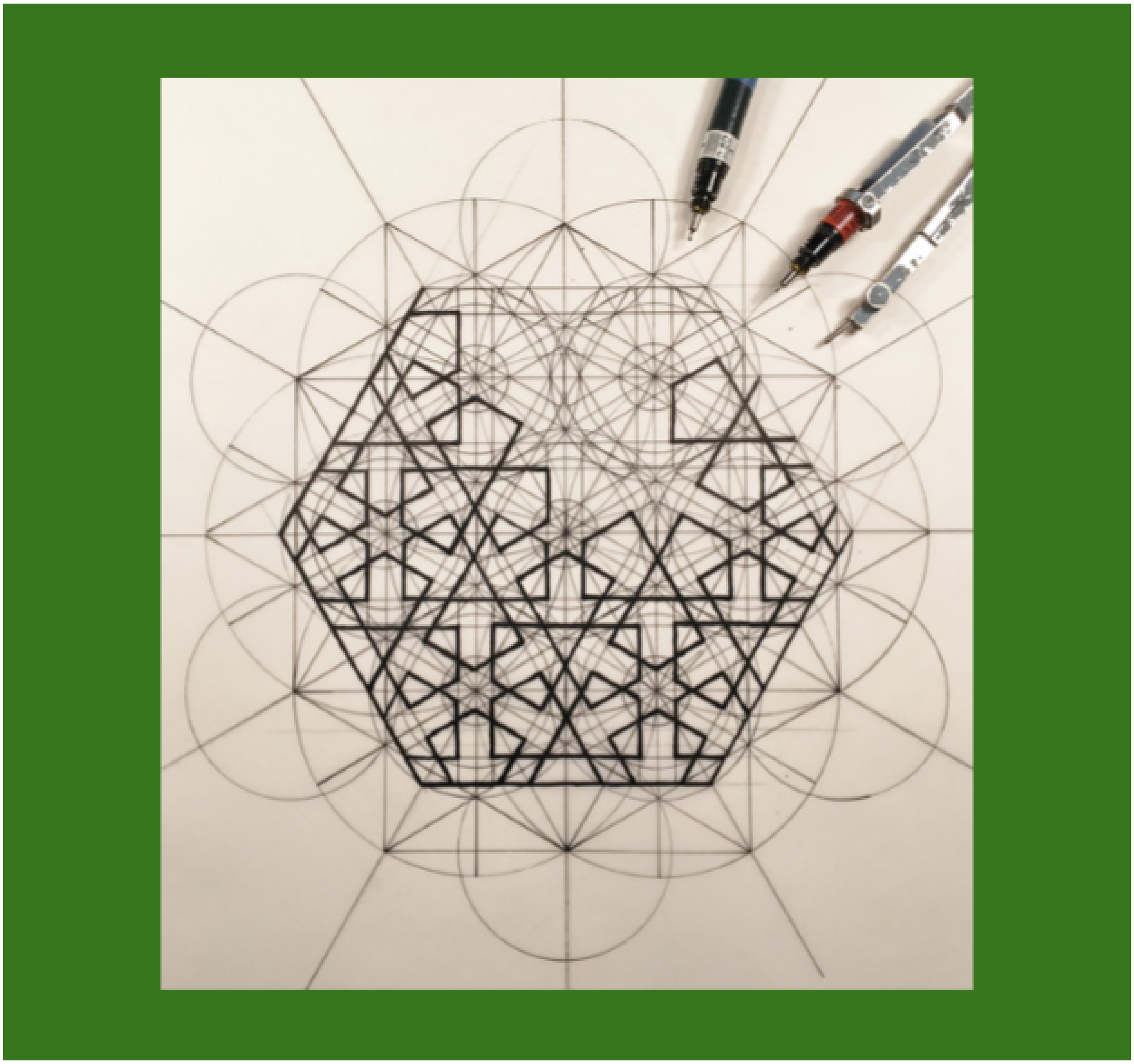


Matemáticas I

Prácticas con Geogebra

Profesora: Laura Losada Vieiro

Índice

Trigonometría

Práctica 1

- Abre el programa Geogebra (mejor Geogebra Clásico), puedes usar el que está descargado en el ordenador o usar uno online. En ningún caso es necesario que inicies sesión.

- Deja el espacio en blanco, sin ejes y sin cuadrícula (botón derecho quitar ejes o quitar cuadrícula, o bien en una barra de herramientas que puede que tengas en la esquina superior derecha)

Vamos a dibujar un ángulo, para eso trazamos dos semirrectas a partir de un punto dado.

1.- Con la herramienta “punto” dibuja un punto A en el espacio de trabajo.

2.- Con la herramienta “semirrecta” dibuja dos semirrectas, f y g, a partir del punto A. Aparecen también los puntos B y C.

3.- Con la herramienta “medir ángulos” mide el ángulo, alfa, que forman las semirrectas f y g. Para ello Señala los puntos C, A y B en sentido horario.

4.- Comprueba que al mover los puntos B o C, se cambia el valor del ángulo.

Vamos a construir dos triángulos rectángulos sobre uno de los lados del ángulo.

1.- Con la herramienta “recta perpendicular” traza una perpendicular a f pasando por B. Aparece la recta h.

3.- Con la herramienta “intersección” traza el punto D de intersección de la perpendicular (h) que acabas de trazar con la semirrecta g.

4.- Con la herramienta “recta perpendicular” traza una perpendicular a f pasando por C, aparece la recta i, que debe ser paralela a h.

5.- Con la herramienta “intersección”, traza el punto E, que interseca la recta i con la semirrecta f.

4.- Con la herramienta “polígono” traza los polígonos ABE y ACD.

5.- Da color y formato a tu gusto de forma que se distingan claramente los dos triángulos. Oculta todos los objetos salvo: Los puntos B y C, los triángulos, el ángulo alfa.

6.- Selecciona cada uno de los segmentos que forman cada uno de los triángulos y en su configuración selecciona “mostrar etiqueta o rótulo” y en el desplegable que hay debajo, selecciona “nombre y valor”.

7.- Con la herramienta “mover”, mueve B y/o C para ver cómo cambia tu construcción.

8.- Comprueba que los puntos C y D se mueven dependiendo de B y/o C.

Teorema de Tales.

Como ya sabes, el teorema de Tales relaciona las longitudes de segmentos de rectas secantes definidos por una colección de paralelas a esas rectas.

Una de las aplicaciones que solemos emplear es con triángulos semejantes, en particular, con triángulos **“en posición de Tales”,** que es como se encuentran los dos triángulos rectángulos que acabas de dibujar.

Vamos a comprobar que efectivamente se cumple el Teorema de Tales.

1.- En la línea de entrada de la vista algebraica, teclea “R1=a_1/a”

2.- Con la herramienta texto, pulsa en cualquier espacio blanco de la zona gráfica y escribe Razón 1 = \frac{objetoa_1}{objetoa} =objetoR1 los “objetos” los tienes que seleccionar en los “objetos geogebra” que aparecen si le das a “avanzado” debajo del espacio de escritura.

3.- Comprueba que te sale un cociente de dos segmentos paralelos en tu construcción. Comprueba que moviendo los puntos A, B y/o C, estos segmentos cambian y también cambia la razón que has averiguado.

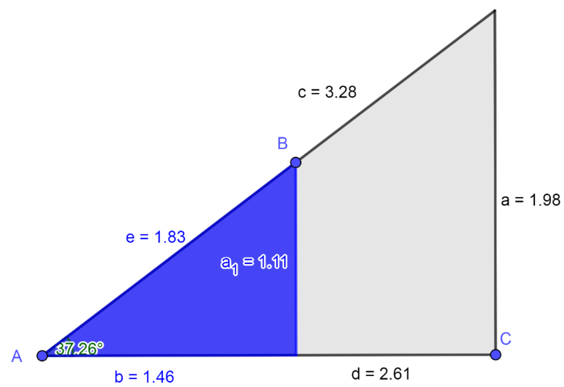
4.- Procede de forma análoga para averiguar y escribir Razón 2 (entre e y c) y Razón 3 (entre b y d).

5.- Comprueba que las tres razones son iguales y que al mover los elementos de la construcción varían de valor, pero todas permanecen idénticas.

Esa es la **RAZÓN DE PROPORCIONALIDAD** entre los triángulos que hemos trazado.

Para **guardar** todo lo que has hecho solo debes ir a la esquina superior derecha, dar a “guardar” e ignorar el cuadro de diálogo que te pide que inicies sesión. Al cerrarlo aparece la opción de poner nombre a tu archivo y guardarlo en el ordenador.

Ponle el nobre **“practica1_tunombre.ggb”** y adjúntalo en la “tarea geogebra1”



$$Razón1 = \frac{1.11}{1.98} = 0.56$$

$$Razón2 = \frac{1.83}{3.28} = 0.56$$

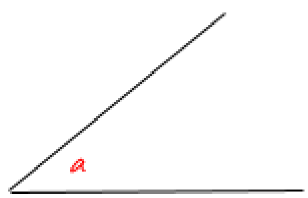
$$Razón3 = \frac{1.46}{2.61} = 0.56$$

Práctica 2

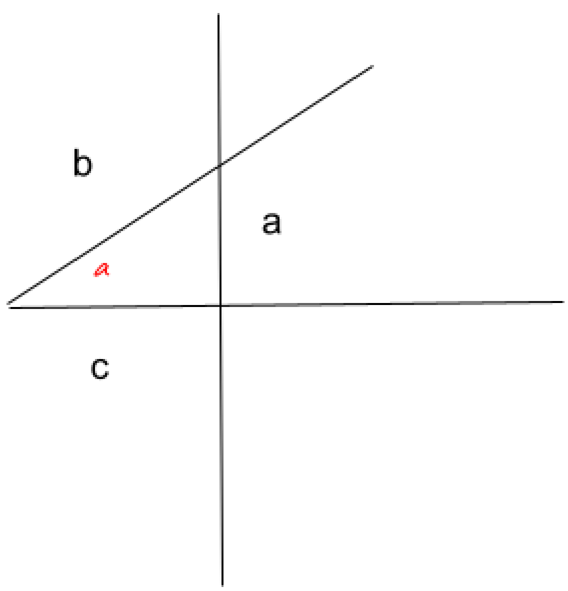
Introducción:

Seguro que del año pasado y del comienzo de este recuerdas la definición de razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Dado un ángulo **α**, agudo, como el de la figura:



Trazamos una perpendicular cualquiera a uno de sus lados y definimos un triángulo rectángulo de lados a, b y c:



En esta situación, definimos:

$sen\, \alpha = \frac{a}{b}$

$cos\, \alpha = \frac{c}{b}$

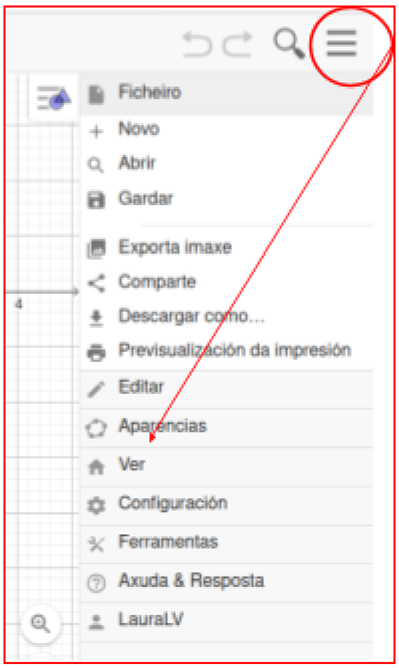
$tg\, \alpha = \frac{a}{c}$

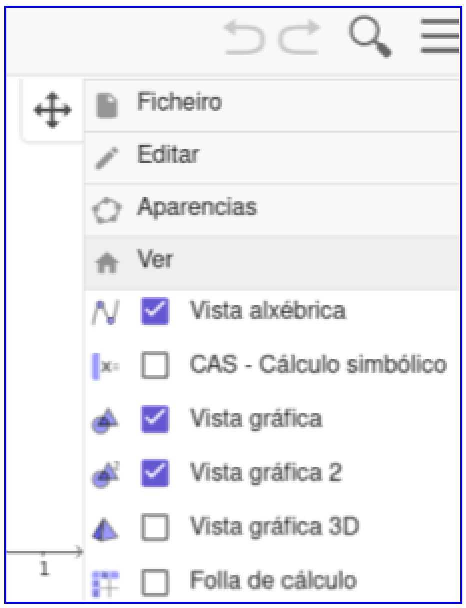
Tarea 1

Vamos a recrear esta definición en Geogebra y a demostrar que está bien hecha, es decir, que las razones trigonométricas de α no dependen del triángulo escogido.

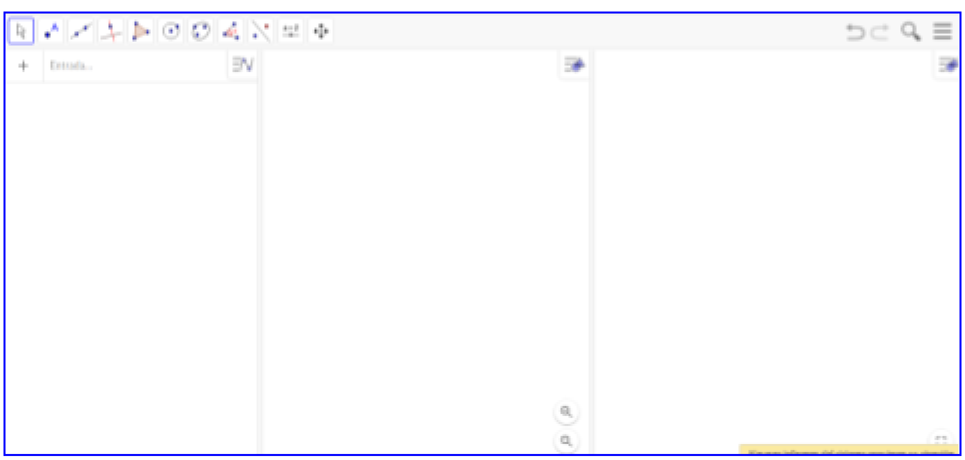
Preparación del espacio de trabajo:

1.- Deben estar activadas: vista algebraica, vista gráfica 1 y vista gráfica 2.





El resultado final debe ser (después de quitar cuadrículas y ejes) así:



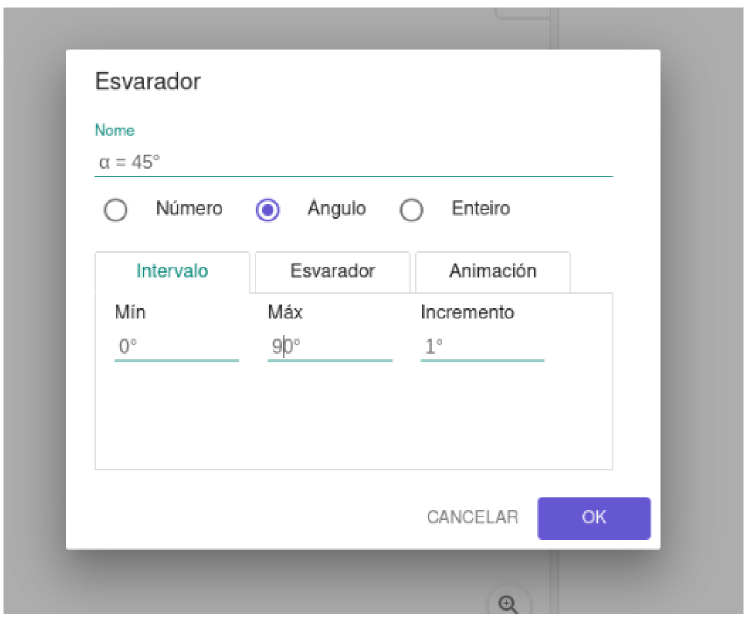
2.- En el mismo icono de la esquina superior derecha, hay un apartado llamado “configuración”. Abrimos y escogemos 3 cifras decimales en el redondeo. Escogéis el idioma que más os guste (castellano o gallego) y el tamaño de letra que queráis entre 12pt y 16pt.

Ejercicio 1. Construcción de un ángulo agudo dinámico.

En la vista gráfica 2 (la que está más a la derecha)

1. Con la herramienta deslizador/esvarador,

pincha sobre la zona de trabajo y selecciona: “ángulo”, valor mínimo “0º”, valor máximo “90º”, dale a OK.



En la vista gráfica 1 (la que está en medio)

1. Con la herramienta “Nuevo punto”, dibuja el punto A sobre el espacio de trabajo.
2. Con la herramienta “semirrecta”, dibuja una semirrecta de origen en A y que pase por un nuevo punto, B.
3. Con la herramienta “ rotar un objeto alrededor de un punto según un ángulo”, creamos B’ de la siguiente forma: picamos sobre B, luego sobre A y en el valor del ángulo escribimos α usando el teclado virtual que aparece en la ventana de opciones.
4. Trazamos la semirrecta AB’

5. Trazamos el ángulo BAB’, usando la herramienta “ángulo”. En su configuración ponemos que muestre el valor, pero no el nombre.
6. Ocultamos el punto B’. Ocultamos las etiquetas de las semirrectas.

Acabas de dibujar un ángulo dinámico. Esto significa que si mueves el deslizador cambia el ángulo, si cambias B, cambian las posiciones de las semirrectas pero no el ángulo y si cambias A, cambian las semirrectas pero no el ángulo.

Ejercicio 2: Definimos las razones trigonométricas del ángulo que acabamos de construir.

En la vista gráfica 1:

Sobre el ángulo que acabas de construir,

1. Traza una perpendicular a la semirrecta que une A y B pasando por B.
2. Con la herramienta “interseca dos objetos”, determina C, punto de corte de la perpendicular con el otro lado del ángulo α.
3. Comprueba que moviendo el deslizador, se mueve C.
4. Comprueba que moviendo B, se mueve C y la perpendicular, pero que el ángulo no varía.
5. Traza el segmento AB y renómbralo como “c”, y en la configuración pon que se muestre su nombre y su valor.
6. Traza el segmento AC y renómbralo como “b”, y en la configuración pon que se muestre su nombre y su valor.
7. Traza el segmento BC y renómbralo como “a”, y en la configuración pon que se muestre su nombre y su valor.
8. Oculta la recta perpendicular y las semirrectas.

En la vista algebraica:

1. Escribe seno =a/b
2. Escribe coseno=c/b
3. Escribe tang =a/c

En la vista gráfica 2:

1. Con la herramienta texto, en modo “fórmula latex” escribe:

   sen α = \frac{a}{b} =\frac{objeto a}{objeto b} = objeto seno

Los objetos debes buscarlos en la opción avanzado dentro de la lista de objetos que ya has construído con geogebra. Aparecen bajo el símbolo de la aplicación.

Repite estos pasos para escribir

cos α =\frac{c}{b}=\frac{objeto c}{objeto b}=objeto coseno

tg α=\frac{a}{c}=\frac{objeto a}{objeto c}= objeto tang

Comprueba que al mover el deslizador, cambia el ángulo y sus razones trigonométricas.

Comprueba que al mover B o mover A, cambian las longitudes de los lados del triángulo, pero no el ángulo y **tampoco sus razones trigonométricas**.

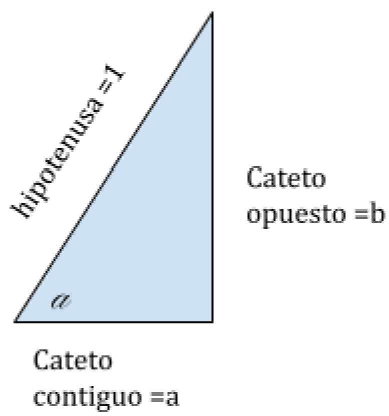
Esto significa que las razones trigonométricas **están bien definidas**, pues no dependen del triángulo que tracemos para definirlas, solo dependen del ángulo.

Práctica 3

Introducción:

Según lo que habéis construído en la práctica anterior, las razones trigonométricas de un ángulo no dependen del tamaño del triángulo que tomemos para definirlas, solo del ángulo agudo sobre el que trabajemos.

De este modo, para simplificar la definición y los cálculos, vamos a suponer un triángulo rectángulo de hipotenusa 1.



Según lo visto,

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{1} = b$$

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{a}{1} = a$$

$$tag\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{b}{a}$$

Tarea 1

Vamos a colocar toda esta información sobre unos ejes coordenados:

Preparación del espacio de trabajo:

1.- Deben estar activadas: vista algebraica, vista gráfica 1 y vista gráfica 2.

2.- NO quitéis los ejes ni la cuadrícula.

3.- Escogéis 3 cifras decimales en el redondeo. Escogéis el idioma que más os guste (castellano o gallego) y el tamaño de letra que queráis entre 12pt y 16pt.

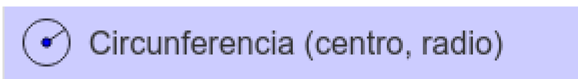
[Ejercicio 1. Construcción de la circunferencia goniométrica.]

En la vista gráfica 2.

1. Pon un deslizador con un ángulo α que se pueda mover entre 0º y 90º.

En la vista gráfica 1.

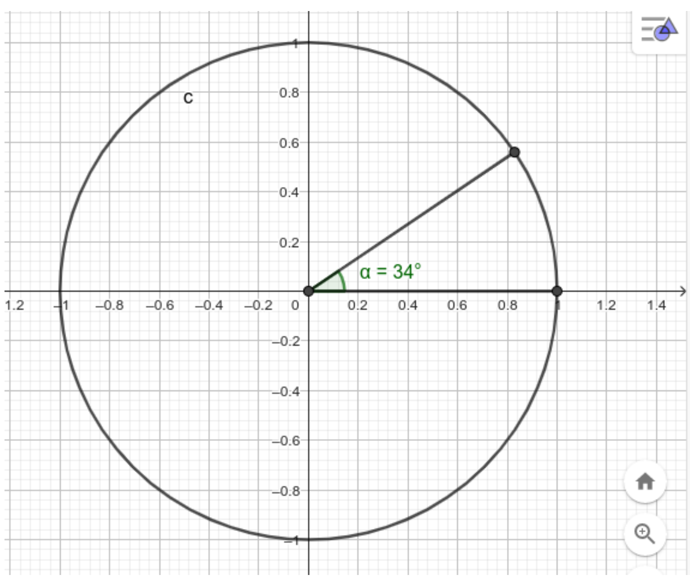
1. Usa la herramienta



para crear una circunferencia de centro (0,0) y radio 1.

2. Con la herramienta “intersección”, dibuja el punto de corte de la circunferencia con la parte positiva del eje X. Se llamará B.
3. Usa los pasos de la práctica anterior para crear un ángulo α con vértice en A y que recorra la circunferencia según muevas el deslizador.

Tiene que quedar algo así:



Según muevas el deslizador verás que se mueve el ángulo α .

4. Traza la perpendicular al eje de abscisas pasando por B’, se llama h.
5. Traza el punto de intersección entre h y el eje de abscisas, se llamará C.
6. Dibuja el triángulo ACB’. Comprueba que moviendo el deslizador, se mueve el triángulo.
7. Cambia la etiqueta de la hipotenusa y los catetos para que se muestre solo su valor.

8. Traza la perpendicular al eje de ordenadas pasando por B’, se llama i.
9. Traza el punto de intersección de esta perpendicular con el eje de ordenadas, se llama D.
10. Traza el segmento DB’.
11. Modifica las características de D y de C para que aparezcan su nombre y su valor en la etiqueta.

En la vista gráfica 2.

Repite los pasos de la práctica anterior para que aparezcan las razones trigonométricas del ángulo α y sus valores.

Comprueba que el seno del ángulo se corresponde con el valor de D y con el cateto opuesto.

Comprueba que el coseno del ángulo se corresponde con el valor de C y con el cateto contiguo.

Para terminar.

Cambia el color de los puntos D y C y activa su rastro. Usa el botón derecho sobre cada punto para que aparezca esa opción.

Mueve el deslizador de nuevo.

Contesta a estas preguntas en el cuadro de texto que se abre en la tarea.

1.- ¿Qué observas?

2.- ¿Entre qué valores se mueve el valor del seno y del coseno del ángulo α ?

3.- Si repites la misma práctica pero con una circunferencia de radio distinto a 1, ¿ crees que los valores del seno y el coseno se verán alterados? Justifica tu respuesta.

En ese supuesto, ¿se corresponderán los valores de catetos, puntos y razones trigonométricas como ocurre con la circunferencia de radio 1?

4.- La circunferencia de radio 1 con centro en (0,0) y sobre los ejes coordenados se llama CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA, y es la elegida para definir las razones trigonométricas. ¿Por qué crees que se ha elegido esta circunferencia y no otra de radio 7 y centro (1,2) por ejemplo ?

Organiza colores y etiquetas a tu gusto para que se vea lo que realmente importa en esta práctica y no lo accesorio. Luego entrega tu práctica en formato ggb como adjunto de la tarea.

NO DESCARTES ESTE ARCHIVO, SEGUIRÁS TRABAJANDO EN ÉL.

Ejercicio 2. Ángulos del segundo cuadrante.

Sobre el dibujo de la práctica 1, repite los pasos del ejercicio 1 pero para un ángulo β que esté entre 90º y 180º.

Estos son los ángulos del segundo cuadrante.

Contesta a estas preguntas en el cuadro de texto de la tarea:

5.- ¿Entre qué valores se mueven ahora seno y coseno del ángulo?

6.- ¿Qué relación hay entre seno y el punto D? ¿Y entre coseno y el homólogo a C ?

7.- Trata de colocar α y β de manera que sus senos sean iguales, ¿qué relación hay entre los cosenos? ¿Y entre α y β ?

8.- Has dibujado dos ángulos suplementarios, ¿qué propiedad define a dos ángulos suplementarios? ¿Qué puedes decir sobre las razones trigonométricas de dos ángulos suplementarios?

Ejercicio 3. Ángulos del tercer cuadrante cuadrante.

Ahora, sobre el dibujo del ejercicio anterior, repite los pasos para un ángulo, γ, del tercer cuadrante (entre 180º y 270º).

Contesta a estas preguntas en el cuadro de texto de la tarea:

9.- Observa la relación entre los ángulos α y γ. ¿Qué pasa si consigues que ambos tengan coseno con el mismo valor absoluto? ¿Cómo es la relación entre los senos? ¿Y entre las tangentes?

10.- Generaliza el comportamiento de las razones trigonométricas de dos ángulos que se diferencian en 180º.

Ejercicio 4. Ángulos del cuarto cuadrante.

Para terminar, repite la práctica para un ángulo, δ, del cuarto cuadrante (entre 270º y 360º).

Contesta a estas preguntas en el cuadro de texto de la tarea:

11.- Trata de conseguir que δ *y* α tengan el mismo coseno, ¿qué relación hay entre los senos? ¿ y entre las tangentes? ¿ y entre los ángulos?

12.- En la situación anterior, tienes dos ángulos que suman 360º. El ángulo que resta hasta llegar a 360º, es el opuesto a α, por eso a δ suele llamarse “opuesto de α”. Generaliza la relación entre las razones trigonométricas de dos ángulos opuestos.

Organiza colores y etiquetas a tu gusto para que se vea lo que realmente importa en esta práctica y no lo accesorio. Luego entrega tu práctica en formato ggb como adjunto de la tarea.