

9 Reciprocitat

9.8 Malles recíproques 3D. Plantilla

9.8.1 Malles recíproques 3D. Exemple. Cúpula

9.8 Malles recíproques 3D. Plantilla

Philippe Block del *Massachusetts Institute of Technology* publica el 2009 l'estudi *Thrust Network Analysis. Exploring Three-dimensional Equilibrium*. No és la primera vegada que s'esmenta aquest autor: en el capítol 1 (1.4 a 1.8) a les aplicacions dedicades a la generació de formes basades en el polígon funicular, i en el capítol 10 (10.8 i 10.9) a les aplicacions que estudien les barres d'igual tensió, igualment basant-se en el polígon funicular. El 2015 publica junt amb *Masoud Akbarzadhe* i *Tom Van Male* d'*ETH* de Zurich l'estudi *3D Graphic Statics: Geometric Construction of Global Equilibrium* que significa per qui redacta aquesta memòria la primera aproximació al polígon funicular en l'espai. A partir d'aquí, s'intenta utilitzar GeoGebra per aconseguir un context dinàmic a les propostes de *Philippe Block*.

El que Block es proposa és calcular estructures de barres articulades en l'espai utilitzant les propietats de les figures recíproques, tal com deien Maxwell o Cremona. Les barres estan subjectes únicament a esforç axial. L'adaptació a 3D d'aquestes propietats implicarà una sèrie d'observacions i restriccions que no es donen a les dues dimensions i que es tractaran a continuació. Donada una superfície en l'espai, per exemple una cúpula, en síntesi es tractaria de (fig. 9.9):

- .Formes. Discretitzar la superfície original objecte d'anàlisi amb una malla.
- .Diagrama de formes. Projectar aquesta malla en un pla horitzontal.
- .Diagrama de forces. Construir en el mateix pla horitzontal la malla recíproca. Això assegura l'equilibri. Si hi ha equilibri en el diagrama de formes, també hi haurà a les formes.
- .Traslladar les forces obtingudes en el diagrama de forces al diagrama de formes i d'aquí a les formes, obtenint les sol·licitacions a les barres. De la mateixa manera obtenir les càrregues gravitatòries en el nusos.
- .Atès que les càrregues gravitatòries (les úniques que es consideren en aquesta aplicació) són punts, tant en les formes com en el diagrama de formes, aquestes no tenen expressió en el diagrama de forces. Això implica, per tant, que les càrregues exteriors no són dades sinó resultats. Caldrà utilitzar el que Block anomena un factor d'escala per arribar a una solució de compromís entre geometria, accions exteriors i esforços a les barres.

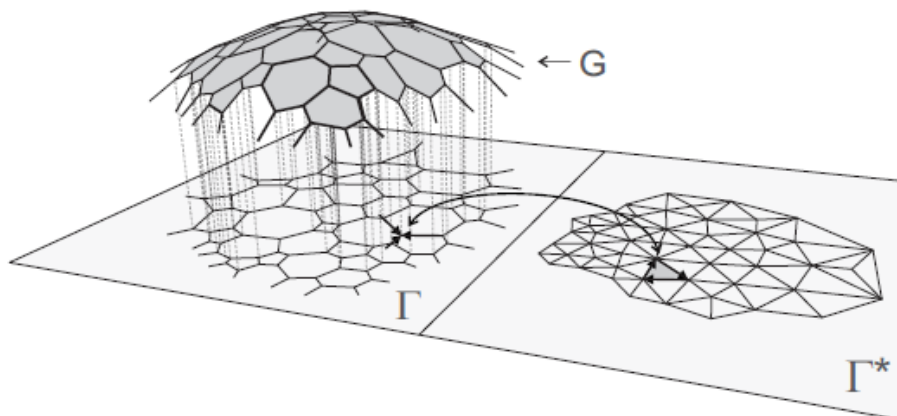


Fig. 9.9

El procediment d'anàlisi gràfic utilitzant GeoGebra és el següent:

.1. Es proposa una malla en el pla horitzontal (fig. 9.10). En aquest cas es tracta d'una malla molt senzilla composta per 1 quadrilàter i 12 punts (1...12) que defineixen 9 regions (A...G). Els 12 punts són moblis. Una malla amb més punts o més regions (que poden ser polígons tancats de tants costats com es cregui oportú) donaria més precisió en el càlcul però el seu tractament amb GeoGebra (i especialment treballant en 3D) es fa extraordinàriament complicat i laboriós. Queda construït el diagrama de formes.

.2. Es col·loca de fons una fotografia o un croquis de la superfície a analitzar. Si la geometria d'aquesta forma és sabuda (com passa amb l'esfera de l'exemple de l'aplicació 9.8.1) s'introdueix amb les mateixes eines de GeoGebra. S'estableix una escala geomètrica.

.3. S'aixequen verticalment al pla horitzontal els 12 punts del diagrama de formes fins que es produeix la intersecció entre aquestes verticals i la forma real introduïda anteriorment. Queda reflectit el diagrama de formes a la superfície. Unint els punts de la superfície amb el mateix criteri que en el diagrama de formes, obtindrem la malla a la forma. Queda construïda la forma.

.4. A partir del diagrama de formes es dibuixa (recíprocament) el diagrama de forces. En aquest queda definida la magnitud de les forces que es produeixen a les barres del diagrama de formes. Són diagrames recíprocs. La condició necessària és que les línies homòlogues dels dos diagrames siguin paral·leles. Allò que en un diagrama són polígons tancats, en l'altre són interseccions de punts i viceversa. En el diagrama de forces s'han creat 9 punts (a..g) i 4 recintes o quadrilàters (1...4). Observi's que el punt e serveix únicament per traslladar el diagrama. Els punts a, i, c, i g són inamovibles per a l'usuari, però els punts b, d, f i h es poden moure i amb ells arrossegar els anteriors. Aquest moviment no produeix cap modificació al diagrama de formes. Això vol dir que es poden produir infinits diagrames de forces en els quals l'equilibri està garantit. Aquí s'haurà d'aplicar el factor d'escala, però encara queden algunes operacions pendents.

.5. Les forces concretades en el diagrama de forces es traslladen al diagrama de formes.

.6. Les forces del diagrama de formes es projecten a la malla en 3D de les formes. Queden definides les forces a les barres de la malla.

.7. Les forces a les formes es poden calcular per trigonometria a partir de les obtingudes en el diagrama de formes i dels angles que formen amb l'horitzontal.

.8. De la mateixa manera són calculables les components verticals de les forces a les barres, la qual cosa permetrà saber, també per trigonometria, els valors de les càrregues gravitatòries. Però en el ben entès que aquestes corresponen a una certa silueta del diagrama de forces.

.9. Es poden calcular les càrregues superficials a la forma a partir de les àrees tributàries de les càrregues gravitatòries obtingudes. Si aquestes càrregues superficials, que són la suma de les càrregues d'utilització més permanents són les desitjades, el problema queda resolt i les forces a les barres queden establertes. Si no és així, caldrà modificar el diagrama de forces i/o l'escala de forces fins obtenir la càrrega superficial desitjada.

A la casella que activa el nus 4 del diagrama de formes es mostren, com a exemple, les formes als dos diagrames i a les formes, així com la càrrega gravitatòria.

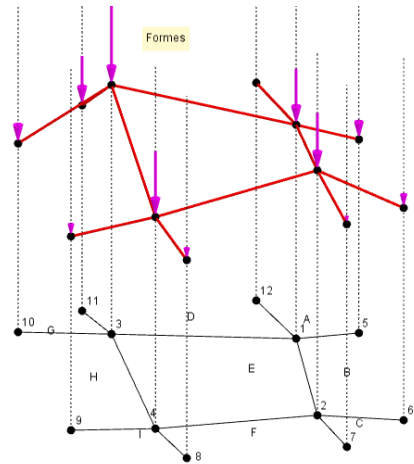
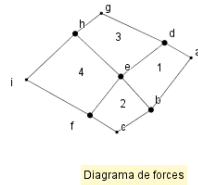
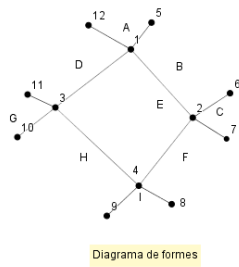


Fig. 9.10

9.8.1 Malles recíproques 3D. Exemple. Cúpula

En aquest exemple, en què es vol estudiar el comportament estàtic d'una cúpula esfèrica en l'espai, els punts de la malla del diagrama de formes intersecten amb una esfera. La malla de les formes queda (amb certa aproximació, atès que els punts exteriors als quadrilàters s'han de col·locar a bona vista) simètricament distribuïda (fig. 9.11). L'aplicació disposa d'una casella en la qual es genera una esfera d'un radi r controlat per un punt lliscant amb centre l'origen de coordenades de GeoGebra. En aquest exemple el radi considerat ha estat de 10.08 m. Una vegada ajustada la malla a les formes i per a una determinada silueta del diagrama de forces, la càrrega gravitatòria repartida a la superfície equivalent ha resultat d'entre 2.31 i 3.12 kN/m² cosa que es considera adequada per a les necessitats requerides. Les forces a les barres estan compreses entre 71.72 i 96.17 kN.

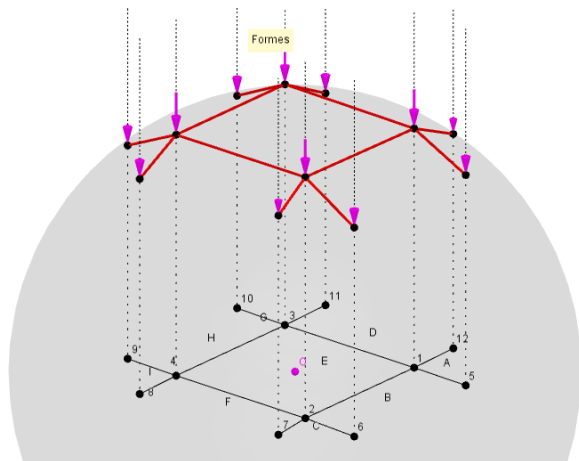
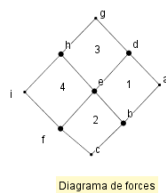
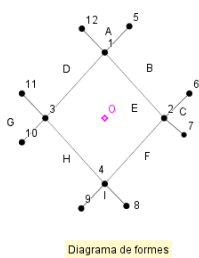


Fig. 9.11