POTENCIAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS E O *SOFTWARE GEOGEBRA*

João Matheus Santos Assis
Instituto Federal da Bahia
joaomatheusassis@gmail.com

Elaine Santos Dias
Instituto Federal da Bahia
elaine.santosd@hotmail.com

Wilson José Ohl
Instituto Federal da Bahia
wjohl@ifba.edu.br

Resumo: Se no passado os números complexos foram alvos de desconfiança por matemáticos que questionavam sua legitimidade, hoje eles são motivos de estranheza por diversos alunos do Ensino Médio. No presente artigo, que é um desdobramento e extensão de um trabalho de conclusão de curso, é realizada uma abordagem do conceito de números complexos e uma investigação das propriedades de potenciação dos mesmos por um viés algébrico e geométrico. Para isso, são utilizadas ferramentas desenvolvidas no *software GeoGebra*. A metodologia adotada é a pesquisa exploratória. Foi analisado o comportamento da potenciação de um número complexo quando seu módulo e argumento são alterados dinamicamente no *GeoGebra*, sendo possível perceber a íntima relação entre potenciação e polígonos e espirais.

Palavras-chave: Números Complexos. Potenciação. Polígonos. Espirais. *GeoGebra*.

INTRODUÇÃO

O conjunto dos números complexos desperta dúvidas e inquietações desde o século XVI quando se deu o início dos seus estudos. Cardano, Bombelli, Euler, Argand, Descartes e Gauss foram alguns dos matemáticos que se debruçaram no estudo das propriedades do conjunto dos números complexos. No que tange ao ensino, o conceito de números complexos é apresentado no final do Ensino Médio e é responsável por certo desconforto entre professores e alunos. Para o PCN+,

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas (BRASIL, 2007, p.122).

No entanto, Chagas (2013) afirma que o ensino de números complexos pode propiciar ao aluno uma visão sistematizada das diferentes formas de linguagens e campos de estudo da Matemática, tais como álgebra e geometria. Além disso, o autor afirma que a abordagem histórica dos números complexos contribui para a compreensão do conhecimento matemático como um processo histórico *"sem dogmatismo ou certezas definitivas"*.

Observando as conexões estabelecidas entre seus conceitos e as demais ciências, bem como sua importância histórica no desenvolvimento do conhecimento matemático, os números complexos configuram-se como um conteúdo relevante para o Ensino Médio. Dessa maneira, a abordagem dos mesmos deve ser feita de maneira a possibilitar que o aluno perceba essa relevância. Autores, como Rosa (1998), Neto (2009) e Melo (2015), defendem o uso de diferentes metodologias – uso de TICs, História da Matemática – para o ensino de números complexos.

Neste artigo, que é um desdobramento e extensão de um trabalho de conclusão de curso (ASSIS, 2018), propõe-se uma abordagem do conceito de números complexos e uma investigação das propriedades de potenciação dos mesmos por um viés algébrico e geométrico a partir de ferramentas desenvolvidas no *software GeoGebra*. Além disso, ainda é explorada a ligação entre as propriedades geométricas da potenciação de números complexos com o conceito de espirais e polígonos regulares e estrelados.

A metodologia predominante utilizada é a exploratória, que segundo Gil (2002, p. 41) "proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições.". Neste cenário, a pesquisa exploratória oportuniza o pesquisador a experimentação, que, eventualmente, pode contribuir para a expansão ou maior clareza do campo de conhecimento estudado.

O *SOFTWARE GEOGEBRA* E SEU VIÉS EDUCACIONAL

O *software* educacional *GeoGebra* integra em um único sistema ferramentas de Geometria, Álgebra e Cálculo. É um *software* de geometria dinâmica, que proporciona ao usuário a manipulação interativa de diversos objetos matemáticos de forma lúdica.

> O termo geometria dinâmica foi inicialmente usado por Nick Jakiw e Steve Rasmussen da Key Curriculum Press, Inc. com o objetivo de diferenciar este tipo de software dos demais softwares geométricos. Comumente ele é utilizado para designar programas interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades, não devendo ser visto como referência a uma nova geometria. (ALVES; SOARES, 2004, p. 4).

Quando inserido no ambiente escolar, o *software GeoGebra* pode auxiliar o docente a melhorar sua prática pedagógica, trazendo maior interatividade e dinamismo para suas aulas. Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2018, p. 27), "em geometria dinâmica (GD), o dinamismo pode ser atribuído às possibilidades em podermos utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação.". Assim, o *GeoGebra* oferece novas alternativas metodológicas para trabalhar objetos matemáticos de forma mais significativa. Em relação aos números complexos, conforme Almeida (2013, p. 13),

> Torna-se trabalhoso para o professor que utiliza apenas o lápis e o quadro, representar os complexos no Plano de Argand-Gauss e esperar que o estudante "imagine" a rotação, a translação etc, entre tais números. Portanto, recomendamos o uso de "softwares" de geometria dinâmica.

Dentre outros *softwares* educacionais de geometria dinâmica, o *GeoGebra* tem diversas vantagens que justificam sua grande popularidade. Foi desenvolvido na linguagem de programação Java, por isso é multiplataforma, ou seja, pode ser usado em diversos sistemas operacionais. Além disso, ele é livre, isto é, pode ser executado, copiado, modificado e redistribuído pelos usuários gratuitamente. Está disponível em diversos idiomas, inclusive o português.

O OBJETO MATEMÁTICO

Antes de ir ao cerne deste trabalho, torna-se fundamental definir os números complexos e suas operações, bem como os polígonos, que surgirão espontaneamente ao longo do estudo da potenciação de um número complexo. Para isso, são utilizados (IEZZI, 2013) e (DOLCE; POMPEO, 2013) como referências elementares.

Números Complexos

O conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, é definido por:

$$\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}.$$

O número $i = \sqrt{-1}$ é chamado unidade imaginária. O número complexo escrito na sob a representação $a + bi$, em que a é a parte real e b, imaginária, está na forma algébrica.

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ dois elementos do conjunto dos números complexos.

- Igualdade: $z = w$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$;
- Adição: $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;
- Multiplicação: $zw = (a + bi) * (c + di) = (\mathrm{ac} - \mathrm{bd}) + (\mathrm{ad} + \mathrm{bc})\mathrm{i}$.

Com relação à adição e à multiplicação, são válidas as propriedades da associatividade, comutatividade, existência do elemento neutro e existência do inverso (exceto para $0 + 0i$ na multiplicação). Além disso, vale a propriedade que relaciona as operações de adição e multiplicação, isto é, a distributividade. Pelo fato de o conjunto dos números complexos ser uma estrutura algébrica que goza dessas propriedades, ele é um corpo.

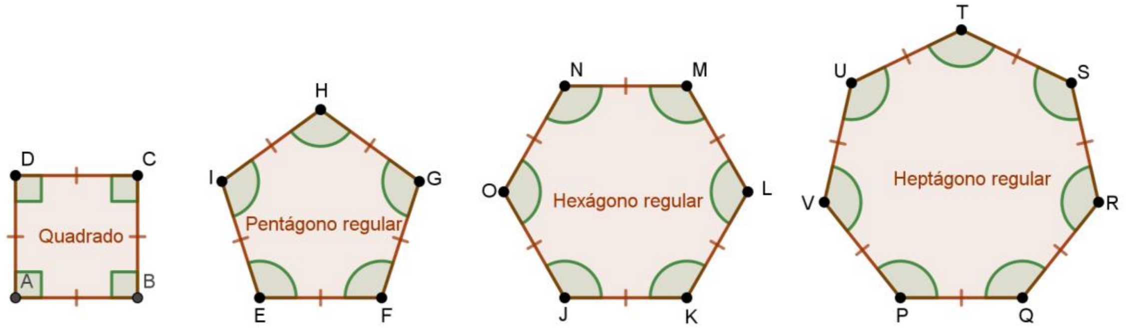
Outra representação do complexo não nulo z é chamada forma trigonométrica ou polar, e é dada por $z = \mathrm{d}\,(\cos\omega + i\ \mathrm{sen}\,\omega)$, em que $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\cos\omega = \frac{a}{d}$ e $\mathrm{sen}\,\omega = \frac{b}{d}$. Nessa forma, d e ω são denominados respectivamente de módulo e argumento do complexo z. Uma das aplicações da forma trigonométrica é na potenciação e radiciação de números complexos. No que se refere à potenciação, motivo de atenção deste trabalho, esta é dada por $z^n = \mathrm{d}^n\ [\cos(n\omega) + i\ \mathrm{sen}(n\omega)]$, em que n é número inteiro.

Definição de polígonos

Definição: Seja uma sequência de pontos $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ de um plano com $n \geq 3$, todos distintos, em que três pontos consecutivos não são colineares. Considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_n, assim como A_n, A_1 e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$.

Um polígono é simples se, e somente se, a interseção de quaisquer dois lados não consecutivos é vazia. São exemplos de polígonos simples os polígonos regulares, que têm todos os seus lados e ângulos internos congruentes.

Figura 1. Alguns exemplos de polígonos regulares.



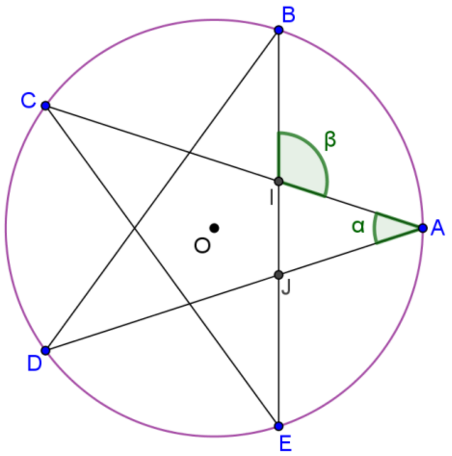
Fonte: Os autores (2019).

Os polígonos estrelados

Definição: Sejam n e k números naturais tais que n > 4, 1 < k < n-1 e com MDC (n, k) =1. Chamamos de polígono estrelado $\left\{\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right\}$ ao polígono, não simples, de n lados, obtido a partir da divisão de uma circunferência em n partes congruentes, ligando-se sucessivamente os pontos de divisão de k em k.

Uma propriedade tanto dos polígonos regulares quanto dos estrelados é o fato de ambos serem inscritíveis em uma circunferência. Um exemplo bastante famoso de polígono estrelado é o pentagrama, uma estrela composta por cinco retas e que possui cinco pontas, conforme a figura 2. Da figura, os ângulos α e β são chamados respectivamente de reentrante e saliente (Costa *et al.*, 2012). Conforme o dicionário Aurélio, Ferreira (2011, p. 751), reentrante é o que forma reentrância, que, por sua vez, significa ângulo para dentro.

Figura 2. Exemplo de um polígono estrelado.



Fonte: Os autores (2019).

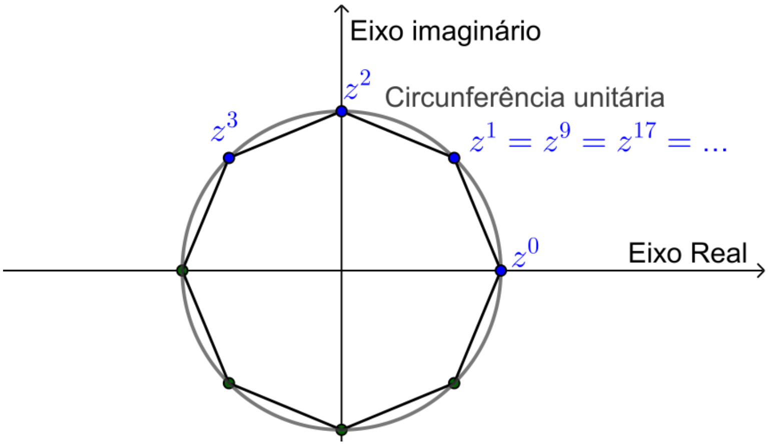
A soma dos ângulos reentrantes de um polígono estrelado é dada por $S_{(n,k)} = (n-2k).180°$. No exemplo da figura 2, em que n = 5 e k = 2, $S_{(5,2)} = 180°$. Desta forma, $\alpha = \frac{S_{(5,2)}}{5} = 36°$. Nota-se ainda que, o ângulo $E\hat{I}A$ é suplementar de β e o triangulo IAJ é isósceles. Logo, $\beta = 108°$.

ANÁLISE DA POTENCIAÇÃO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Interpretando a fórmula, é possível perceber que a potência (z^n) está em função do módulo (d) e do argumento (ω). Localizando no plano de Argand-Gauss as potências de um número complexo e ligando-as consecutivamente por um segmento de reta resulta um fractal ou um polígono regular ou estrelado.

Se o módulo for unitário e o argumento um divisor de 360°, o resultado será um polígono regular, desde que ω não seja múltiplo de 180°. Por exemplo, para $\omega = 45°$, tem-se um octógono (360°/45°=8) regular. Isto é, fazendo n variar entre zero e infinito, obtém-se ângulos côngruos e pontos iguais periodicamente, como $z_0 = z_8 = z_{16} = \cdots = z_{8k} = \cdots$, com k inteiro.

Figura 3. Potências de $z = 1(\cos 45° + i.\,\mathrm{sen}\, 45°)$.



Fonte: Os autores (2019).

Seguindo o mesmo raciocínio, tem-se um dodecágono regular para $\omega = \frac{360°}{12} = 30°$ e $d = 1$. Caso $\omega \in \mathbb{Z}^*$ não seja divisor de 360°, os pontos obtidos repetem-se somente após $MMC(\omega;\ 360°)$. Por exemplo, $\omega = 70°$.

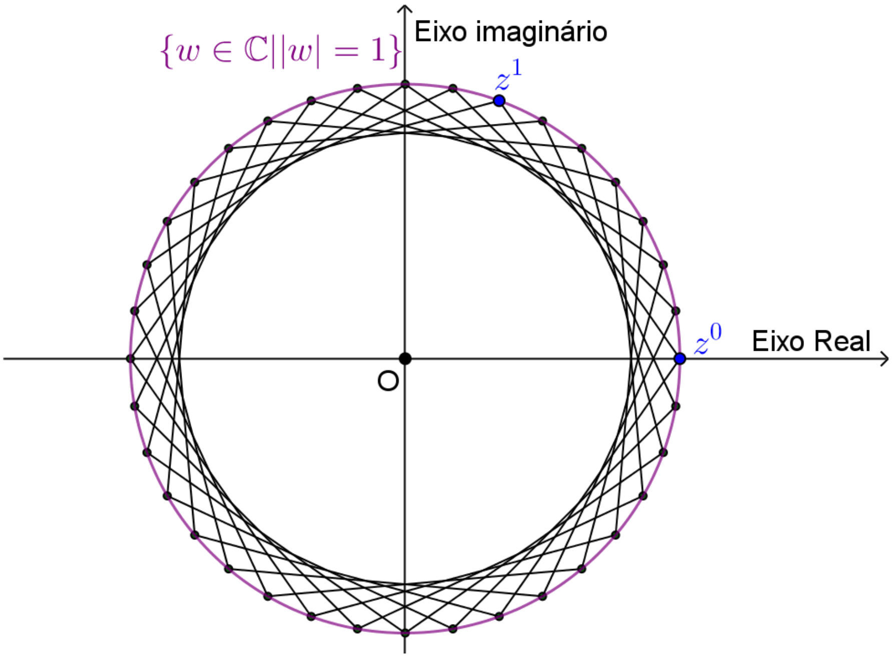
Tabela 1. Estudo dos arcos múltiplos de 70° realizado na janela planilha do *GeoGebra*.

	A	B	...	D	E	...	G	H
1	ω	Arco Côngruo		ω	Arco Côngruo		ω	Arco Côngruo
2	0	0		630	270		1260	180
3	70	70		700	340		1330	250
4	140	140		770	50		1400	320
5	210	210		840	120		1470	30
6	280	280		910	190		2520	0
7	350	350		980	260		2590	70
8	420	60		1050	330		2660	140
9	490	130		1120	40		2730	210
10	560	200		1190	110		2800	280

Fonte: Os autores (2019).

Com o teste numérico realizado na tabela acima, percebe-se que o complexo $z^1 = 1\ (\cos 70° + i\ \mathrm{sen}\, 70°) = z^{37}$. Isto porque $MMC(70°;\ 360°) + 70° = 2520° + 70° = 2590°$, que tem a mesma extremidade do arco 70° após sete voltas completas no sentido anti-horário, e $\frac{2590°}{70°} = 37$. A figura a seguir proporciona a visualização desse estudo. A ligação das potências consecutivas de z forma um polígono estrelado.

Figura 4. Potências de $z = 1(\cos 70° + i.\operatorname{sen} 70°)$.

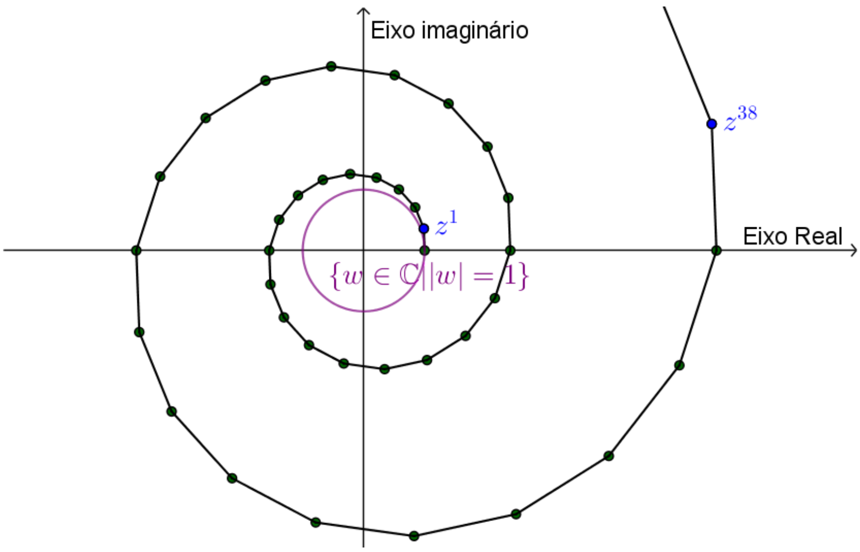


Fonte: Os autores (2019).

A circunferência está dividida em 36 partes congruentes, ligando-se sucessivamente os pontos de divisão de 7 em 7. Indica-se por $\left\{ {36 \atop 7} \right\}$. De fato, MDC (36, 7) = 1.

Caso o módulo seja maior que um, têm-se figuras pouco expressivas à percepção humana, visto que à medida que n cresce, d^n assume valores cada vez maiores já que o crescimento é exponencial. Com efeito, $\lim_{n \to \infty} d^n = +\infty$. O comportamento dos pontos é de uma espiral, "curva plana gerada por um ponto móvel que gira em torno de um ponto fixo, ao mesmo tempo que dele se afasta ou se aproxima." Ferreira (2011, p. 392), como se pode notar na figura 5.

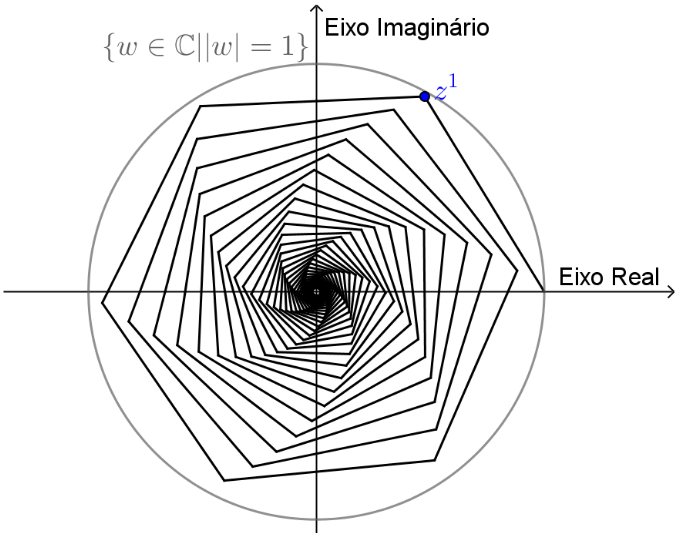
Figura 5. Potências de $z = 1,05(\cos 20° + i.\operatorname{sen} 20°)$.



Fonte: Os autores (2019).

A última análise a se fazer é o comportamento do gráfico quando $d < 1$. É imediato que à medida que n cresce, d^n assume valores cada vez menores, como o exemplo da figura a seguir. De fato, $\lim_{n\to\infty} d^n = 0$. Nesta ilustração, foram utilizados 200 pontos $(z^0, z^1, z^2, \ldots, z^{199})$.

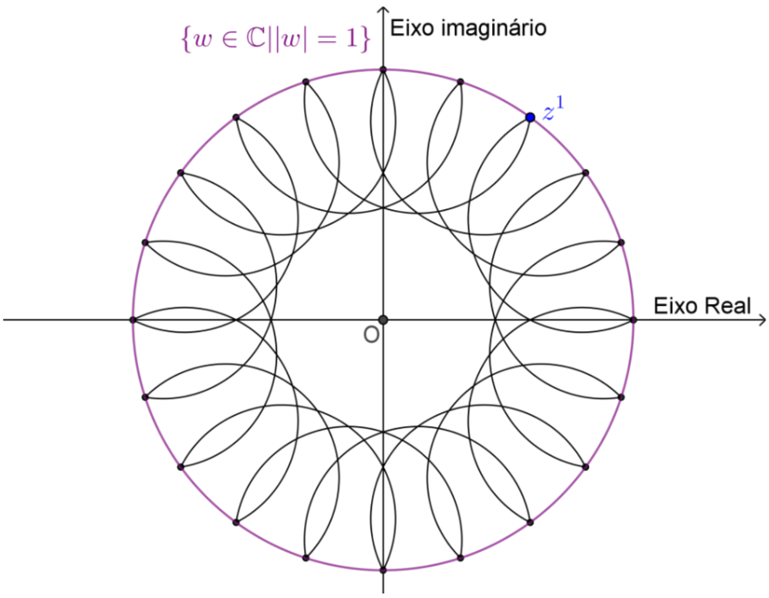
Figura 6. Potências de $z = 0{,}98(\cos 61° + i.\operatorname{sen} 61°)$.



Fonte: Os autores (2019).

Ligando cada potência consecutiva de z, no plano de Argand-Gauss, por um semicírculo, também é possível obter belas figuras, como a que é apresentada logo abaixo.

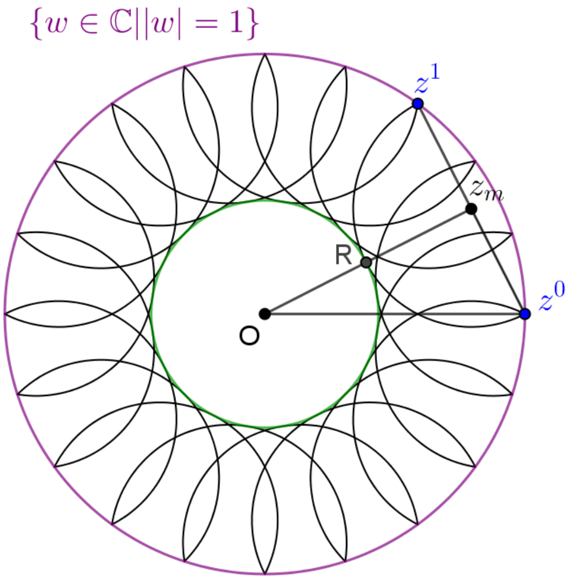
Figura 7. Potências de $z = 1(\cos 54° + i.\operatorname{sen} 54°)$.



Fonte: Os autores (2019).

Na figura 7, o centro "parece" tender a uma circunferência, à medida que a circunferência unitária é dividida em mais partes iguais. Para saber qual é a equação da circunferência de raio mínimo que tangencia cada semicírculo, considere a figura a seguir.

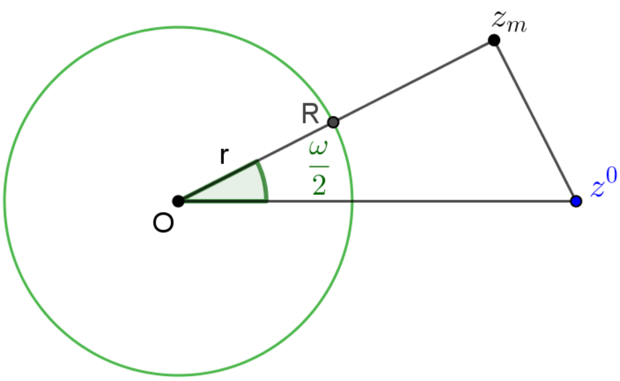
Figura 8. Potências de $z = 1(\cos 54° + i.\,\text{sen}\, 54°)$ com alguns pontos importantes.



Fonte: Os autores (2019).

Na figura 8, z_m é o ponto médio dos pontos z^0 e z^1 e centro do semicírculo determinado por estes pontos. O triângulo z^0Oz_m é reto em z_m. É fácil perceber que z^0 e z^1 são equidistantes do centro, assim Oz_m assume o papel de altura do triângulo isósceles z^0Oz^1. Algumas das propriedades do triângulo isósceles é que a mediatriz, a bissetriz, a mediana e a altura relativas à base, neste caso $\overline{z^0z^1}$, coincidem. Um das implicações é que o ângulo $\omega = z^0\hat{O}z^1 = 2(z^0\hat{O}z_m)$, isto é, $z^0\hat{O}z_m = \frac{\omega}{2}$.

Figura 9. Ênfase nos elementos essenciais para determinar a equação da circunferência.



Fonte: Os autores (2019).

Para determinar a medida do segmento OR, indicado por r, basta calcular o módulo da diferença entre Oz_m e Rz_m. Do triângulo, têm-se as relações:

$$\text{sen}\frac{\omega}{2} = z^0z_m \qquad \text{e} \qquad \cos\frac{\omega}{2} = Oz_m.$$

Como $\overline{z^0z_m} \equiv \overline{Rz_m}$, segue que:

$$\left|\cos\frac{\omega}{2} - \operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right| = r.$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado:

$$\operatorname{sen}^2\frac{\omega}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2} + \cos^2\frac{\omega}{2} = r^2$$

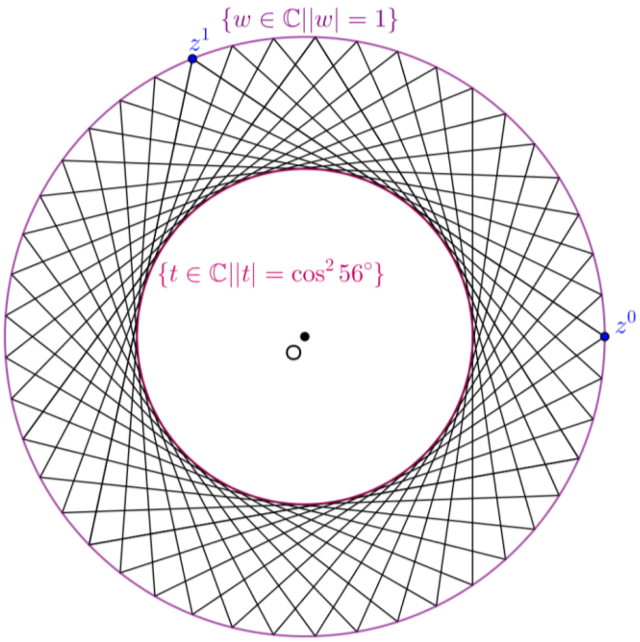
$$1 - 2\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2} = r^2.$$

Portanto, a equação da circunferência é dada por $x^2 + y^2 = 1 - 2\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}$.

Da trigonometria, $\operatorname{sen}\omega = 2\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}$. Assim, reescreve-se a equação anterior, $x^2 + y^2 = 1 - \operatorname{sen}\omega$. Daí decorre que a equação da circunferência circunscritível ao semicírculo estrelado formado pela potenciação do número complexo de módulo unitário e argumento 54° (figura 9) é dada por $x^2 + y^2 = 1 - \operatorname{sen} 54°$.

Seguindo o mesmo raciocínio, é possível realizar a mesma análise para as potências de um número complexo de módulo unitário, ligados por segmentos de reta. Obtendo como equação $x^2 + y^2 = \cos^2\frac{\omega}{2}$. Esta equação representa a circunferência que circunscreve os polígonos regulares e estrelados, como exemplo segue a figura 10.

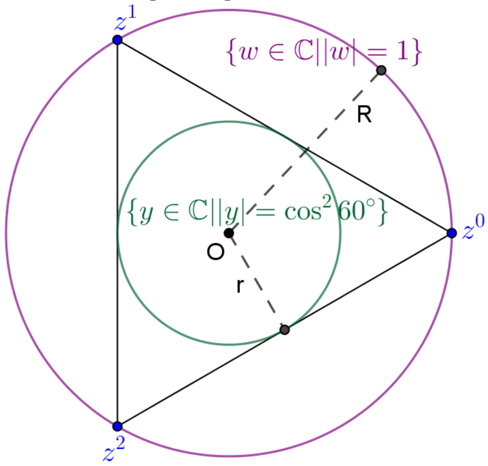
Figura 10. Potências de $z = 1(\cos 112° + i.\operatorname{sen} 112°)$.



Fonte: Os autores (2019).

A fórmula apresentada pode ser confrontada com as obtidas pelos métodos euclidianos (relações métricas nos polígonos regulares). Como exemplo, o raio (r) da equação da circunferência que circunscreve um triângulo regular inscrito em uma circunferência cujo raio é unitário (R=1) é dado por r = $\frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{(\sqrt{3}R)\sqrt{3}}{6} = \frac{3R}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Pelo viés dos complexos, tem-se um triângulo regular para $\omega = \frac{360°}{3} = 120°$ e $d = 1$. Aplicando a fórmula $x^2 + y^2 = \cos^2 \frac{120°}{2} = \cos^2 60° = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, portanto $r = \frac{1}{2}$.

Figura 11. Triângulo regular inscrito e circunscrito.



Fonte: Os autores (2019).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo do presente trabalho foi alcançado, pois conseguimos realizar o estudo da potenciação dos números complexos, com suas interpretações geométricas utilizando os recursos do *software GeoGebra*. Desse modo, conceitos mais sensíveis de serem trabalhos utilizando-se de recursos tradicionais como lousa e piloto foram apresentados de forma mais dinâmica e rápida, proporcionando ao leitor a visualização das propriedades matemáticas geralmente apresentadas pelos livros didáticos somente sob a ótica algébrica.

O referido *software* proporciona a exploração matemática que, por vezes, levam ao descobrimento de relações fascinantes, como a dos números complexos e os polígonos e espirais, apresentadas no decorrer do texto. Constatamos que o referido programa computacional é útil e viável para a representação geométrica desses conjuntos, podendo trazer dinamismo e interatividade para a sala de aula, quando utilizado adequadamente.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao professor mestre Diogo Soares Dórea da Silva e a professora doutora Jamille Vilas Bôas por revisar o texto e apontar suas sugestões.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, S. P. de. *Números complexos para o Ensino Médio*: uma abordagem com história, conceitos básicos e aplicações. 2013. 60f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande.

ALVES, G. de S.; SOARES, A. B. *Um estudo sobre os recursos, as potencialidades e as limitações dos softwares de geometria dinâmica*. Rio de Janeiro: NCE, UFRJ, 2004. 13 p. (Relatório Técnico, 10/04).

ASSIS, J. M. S. *Um estudo dos números complexos e quaterniônicos utilizando o software GeoGebra*. 2018. 61f. Monografia (Licenciatura em matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia. Valença.

BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*: sala de aula e internet em movimento. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais*: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília (DF), 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 12 jan. 2019.

CHAGAS, J. S. B. *A relevância do ensino de números complexos no Ensino Médio na opinião dos professores de Matemática*. 2013. 104f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual do Norte Fluminense. Campos dos Goytacazes.

COSTA, D. M. B.; TEIXEIRA, J. L.; SIQUEIRA, P. H.; SOUZA, L. V. de. *Elementos de geometria*: geometria plana e espacial. 3. ed. Curitiba, 2012. Disponível em: http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/elementos.pdf. Acesso em: 20 jan. 2019.

FERREIRA, A. B. de H. *Aurélio Júnior*. 2. ed. Curitiba: Editora positivo, 2011.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2002.

IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar*. 8. ed. São Paulo: Editora Atual, 2013. V.6.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*. 8. ed. São Paulo: Editora Atual, 2013. V.9.

MELO, L. G. de. *Uma abordagem geométrica do ensino dos números complexos*. 2015. 109f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Alagoas. Maceió.

NETO, R. M. R. *Alternativa metodológica para o ensino e aprendizagem de números complexos*: uma experiência com professores e alunos. 2009. 143f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte.

ROSA, M. S. *Números complexos*: uma abordagem histórica para a aquisição do conceito. 1998. 170f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.