Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 7 - fórmula analítica del producto escalar y ángulo entre vectores

1. Calcula el ángulo que forman $\vec{u}=(2\cdot\sqrt{2},-2)$ **y** $\vec{v}=(\sqrt{2},-1)$ **.**

Tenemos dos definiciones del producto escalar.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x v_x+u_y v_y=2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+(-2)(-1)=4+2=6$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{w}|\cos(\alpha)=\sqrt{8+4}\cdot\sqrt{2+1}\cos(\alpha)=\sqrt{36}\cos(\alpha)=6\cos(\alpha)$$

Igualamos y podemos obtener el ángulo.

$$6=6\cos(\alpha) \quad\rightarrow\quad \cos(\alpha)=1 \quad\rightarrow\quad \alpha=0^{o}$$

Podíamos haber razonado de otra forma: el vector $\vec{u}$ es el doble del vector $\vec{v}$. Son vectores paralelos. El ángulo que forman entre sí es de 0º.

2. Calcula el ángulo que forman $\vec{u}=(3,0)$ **y** $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$ **.**

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{3\cdot 1+0\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha=60º$$

3. Sean los vectores $\vec{u}=(3,-4)$ y $\vec{v}=(5,6)$. Calcula:

a) Módulos y argumentos (ángulo con semieje positivo horizontal) de ambos vectores.

b) El producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y el ángulo que forman los dos vectores entre si.

c) Normalización del vector $\vec{u}$.

d) Un vector ortogonal a $\vec{v}$.

a) $|\vec{u}|=\sqrt{9+16}=5 \rightarrow \alpha=arcotg(\frac{-4}{3})=-53,13^{o}=306,87^{o}$

$|\vec{v}|=\sqrt{25+36}=\sqrt{61} \rightarrow \beta=arcotg(\frac{6}{5})=50,19^{o}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot5-4\cdot6=15-24=-9$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\gamma) \rightarrow \cos(\gamma)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{-9}{5\cdot\sqrt{61}}=-0,23 \rightarrow \gamma=103,32^{o}$

c) $\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \rightarrow \hat{u}=\frac{(3,-4)}{5}=(\frac{3}{5},\frac{-4}{5})$

d) Para obtener un vector perpendicular a $\vec{v}=(5,6)$, intercambiamos las posiciones de las componentes de $\vec{v}$ y cambiamos el signo a una de ellas. Así, los siguientes dos vectores son perpendiculares a $\vec{v}$:

$\vec{w}=(-6,5)$

$\vec{t}=(6,-5)$

4. Sea el polígono irregular de cuatro lados, con vértices consecutivos en los puntos $A(2,3)$, $B(4,-5)$, $C(8,5)$ y $D(5,1)$.

a) Representar el polígono gráficamente y obtener su perímetro (trabajar con raíces, no usar decimales).

b) $\vec{AB}\cdot\vec{AD}$

c) Ángulo en el vértice A

d) $|\vec{BD}|$

a) Representación gráfica del polígono.

Su perímetro es la suma de los módulos de los vectores que forman sus lados.

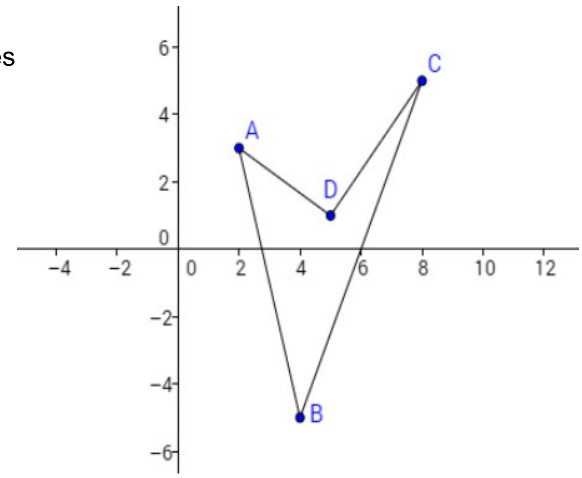
$\vec{AB}=(4-2,-5-3)=(2,-8) \rightarrow |\vec{AB}|=\sqrt{68}$

$\vec{BC}=(8-4,5+5)=(4,10) \rightarrow |\vec{BC}|=\sqrt{116}$

$\vec{CD}=(5-8,1-5)=(-3,-4) \rightarrow |\vec{CD}|=\sqrt{25}=5$

$\vec{DA}=(2-5,3-1)=(-3,2) \rightarrow |\vec{DA}|=\sqrt{13}$

Perímetro → $P=\sqrt{68}+\sqrt{116}+5+\sqrt{13}\ \ unidades$



b) El vector $\vec{AD}=-\vec{DA}=(3,-2) \rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AD}=2\cdot3+8\cdot2=22$

c) $\vec{AB}\cdot\vec{AD}=|\vec{AB}|\cdot|\vec{AD}|\cdot\cos(\alpha) \rightarrow \cos(\alpha)=\dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AD}|}=\dfrac{22}{\sqrt{68}\cdot\sqrt{13}}=0{,}74 \rightarrow \alpha=42{,}27^{o}$

Elegimos el vector del primer cuadrante (coseno positivo) ya que, gráficamente, vemos que el ángulo en el vértice A es agudo (menor de 90^{o}) si vamos en sentido antihorario desde $\vec{AB}$ hasta $\vec{AD}$.

d) $\vec{BD}=(5-4,1+5)=(1,6) \rightarrow |\vec{BD}|=\sqrt{37}$

5. a) Dados los puntos $A(\frac{-1}{2}, a)$, $B(1,0)$ y $C(\frac{-1}{2}, -a)$, halla el valor de a para que el triángulo ABC sea equilátero.

b) Para $a=1$ obtener el ángulo del vértice B usando el producto escalar de vectores (elegir valor del primer cuadrante).

a) El triángulo será equilátero si sus tres lados son iguales (y, en consecuencia, los ángulos internos serán de 60º cada uno).

La longitud de cada lado coincide con el módulo de los vectores que lo forman. Es decir:

$$\vec{AB}=(1+\frac{1}{2},0-a)=(\frac{3}{2},-a) \rightarrow |\vec{AB}|=\sqrt{\frac{9+4a^2}{4}}$$

$$\vec{AC}=(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2},-a-a)=(0,-2\text{a}) \rightarrow |\vec{AC}|=2a$$

$$\vec{BC}=(\frac{-1}{2}-1,-a-0)=(\frac{-3}{2},-a) \rightarrow |\vec{BC}|=\sqrt{\frac{9+4a^2}{4}}$$

Igualamos módulos para obtener lados de la misma longitud:

$$\sqrt{\frac{9+4a^2}{4}}=2a \rightarrow \frac{9+4a^2}{4}=4a^2 \rightarrow 9+4a^2=16a^2 \rightarrow a=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

b) Si $a=1$ tendremos $\vec{AB}=(\frac{3}{2},-1) \rightarrow \vec{BA}=(\frac{-3}{2},1)$, $\vec{BC}=(\frac{-3}{2},-1)$

Si aplicamos el siguiente producto escalar, podemos obtener el ángulo del primer cuadrante en B :

$$\vec{BA}\cdot\vec{BC}=|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|\cdot\cos(\beta) \rightarrow \cos(\beta)=\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|}=\frac{\frac{9}{4}-1}{\sqrt{\frac{13}{4}}\cdot\sqrt{\frac{13}{4}}}=0{,}385 \rightarrow \beta=67{,}38^o$$

6. Obtener el ángulo que forman los vectores $\vec{u}=(1,1,0)$ **y** $\vec{v}=(8,1,1)$ **.**

El ángulo formado por ambos vectores es:

$$\alpha=arcocos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)=arcocos\left(\frac{9}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{66}}\right)=38,43^{o}$$

7. Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$ **,** $B(1,0,2)$ **y** $C(0,2,1)$ **. Calcula el coseno del ángulo en el vértice** A **.**

El ángulo del vértice A será un ángulo comprendido entre 0º y 180º que podemos obtener con ayuda del producto escalar. Ojo, no es el ángulo entre dos rectas, sino entre dos vectores; por lo tanto, no aplicamos el valor absoluto al numerador

$$\cos(\hat{A})=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} \quad \rightarrow \quad \cos(\hat{A})=\frac{0-1+2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

Nos piden el coseno, por lo que no es necesario aplicar arcocoseno para sacar el ángulo.

8. Dados los vectores $\vec{u}=(5,-1)$, $\vec{v}=(m,6)$, $\vec{w}=(2,n)$.

a) Calcular el valor de m para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Calcular el valor de n para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares.

c) Normalizar los vectores.

a) Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \rightarrow (5,-1)(m,6)=0 \rightarrow 5m-6=0 \rightarrow m=\frac{6}{5}$$

b) $\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \rightarrow (5,-1)(2,n)=0 \rightarrow 10-n=0 \rightarrow n=10$

c) $|\vec{u}|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26} \rightarrow \hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(\frac{5}{\sqrt{26}},\frac{-1}{\sqrt{26}})=(\frac{5\sqrt{26}}{26},\frac{-\sqrt{26}}{26})$

$$|\vec{v}|=\sqrt{m^2+36} \rightarrow \hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=(\frac{m}{\sqrt{m^2+36}},\frac{6}{\sqrt{m^2+36}})$$

$$|\vec{w}|=\sqrt{4+n^2} \rightarrow \hat{w}=\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}=(\frac{2}{\sqrt{4+n^2}},\frac{n}{\sqrt{4+n^2}})$$

9. Dado el triángulo de vértices $A(x,2), B(1,3)\, y\, C(2,-1)$ **.**
a) Halla el valor de x **para que el triángulo ABC sea rectángulo en el vértice C.**

b) Halla el valor de x **para que el triángulo ABC sea isósceles y su lado desigual sea** $\overline{AC}$ **.**

a) Dados los tres vértices, podemos obtener los siguientes vectores:

$$\vec{AC}=(2-x,-3) \quad , \quad \vec{BC}=(1,-4) \quad , \quad \vec{AB}=(1-x,1)$$

Si el vértice C debe ser 90º, el producto escalar de los vectores $\vec{AC}$ y $\vec{BC}$ debe ser nulo, ya que serán perpendiculares.

$$\vec{AC}\cdot\vec{BC}=(2-x,-3)\cdot(1,-4) \rightarrow \vec{AC}\cdot\vec{BC}=2-x+12 \quad , \quad \vec{AC}\cdot\vec{BC}=0 \rightarrow 14-x=0$$
$$x=14$$

b) Si el triángulo es isósceles con lado desigual $\overline{AC}$, significa que los otros dos lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ deben tener igual longitud. Es decir, los vectores asociados tienen igual módulo.

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(1-x)^2+1}=\sqrt{x^2-2x+2} \quad , \quad |\vec{BC}|=\sqrt{1+(-4)^2}=\sqrt{17}$$

Igualamos → $x^2-2x+2=17 \rightarrow x^2-2x-15=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}$

Solución → $x=5 \quad , \quad x=-3$

10. Sean $\vec{u}=(1,k,0)$ y $\vec{v}=(8,1,1)$. ¿Cuánto vale k para que sean perpendiculares?

Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \quad \rightarrow \quad 1\cdot 8+k\cdot 1+0\cdot 1=0 \quad \rightarrow \quad k=-8$

11. Dados los vectores $\vec{u}=(3,4)$, $\vec{v}=(-2,5)$, $\vec{w}=(-4,3)$.

a) Normalizarlos.

b) Hallar el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$.

c) ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$?

d) Obtener un vector perpendicular a $\vec{u}$.

a) $|\vec{u}|=\sqrt{9+16}=5 \rightarrow \hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

$|\vec{v}|=\sqrt{4+25}=\sqrt{29} \rightarrow \hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=(\frac{-2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}})=(\frac{-2\sqrt{29}}{29},\frac{5\sqrt{29}}{29})$

$|\vec{w}|=\sqrt{16+9}=5 \rightarrow \hat{w}=\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}=(\frac{-4}{5},\frac{3}{5})$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,4)\cdot(-2,5)=3\cdot(-2)+4\cdot5=14$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=(3,4)\cdot(-4,3)=3\cdot(-4)+4\cdot3=0$ → Producto escalar nulo significa que vectores perpendiculares

c) $ángulo(\vec{u},\vec{v})=arcocos(\frac{u_x v_x+u_y v_y}{|\vec{u}||\vec{v}|})=arcocos(\frac{14}{5\sqrt{29}})=58{,}67^o$

$ángulo(\vec{u},\vec{w})=arcocos(\frac{u_x w_x+u_y w_y}{|\vec{u}||\vec{w}|})=arcocos(0)=90^o$

d) En dos dimensiones la forma más rápida de encontrar un vector perpendicular a otro dado, es intercambiar la posición de las coordenadas y cambiar el signo de solo una coordenada. Por ejemplo:

$\vec{t}=(-4,3)$ es perpendicular a $\vec{u}=(3,4)$

Otro ejemplo:

$\vec{h}=(4,-3)$ es perpendicular a $\vec{u}=(3,4)$

12. Determina todos los vectores $\vec{u}=(a,0,b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares al vector $\vec{v}=(-1,0,1)$.

Si $\vec{u}=(a,0,b)$ tiene módulo 8 → $\sqrt{a^2+b^2}=8$.

Si además $\vec{u}=(a,0,b)$ debe ser perpendicular al vector $\vec{v}=(-1,0,1)$ significa que el producto escalar de ambos vectores debe anularse (por formar entre sí 90º).

Hacemos el producto escalar e igualamos a cero.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \rightarrow -a+b=0 \rightarrow a=b$$

Llevamos este resultado a la primera condición obtenida $\sqrt{a^2+b^2}=8$ y despejamos.

$$\sqrt{a^2+a^2}=8 \rightarrow \sqrt{2a^2}=8 \rightarrow 2a^2=64 \rightarrow a=\pm\sqrt{32}=\pm 4\sqrt{2}$$

Los vectores solución son $\vec{u}=(4\sqrt{2},0,4\sqrt{2})$ y $\vec{u}=(-4\sqrt{2},0,-4\sqrt{2})$