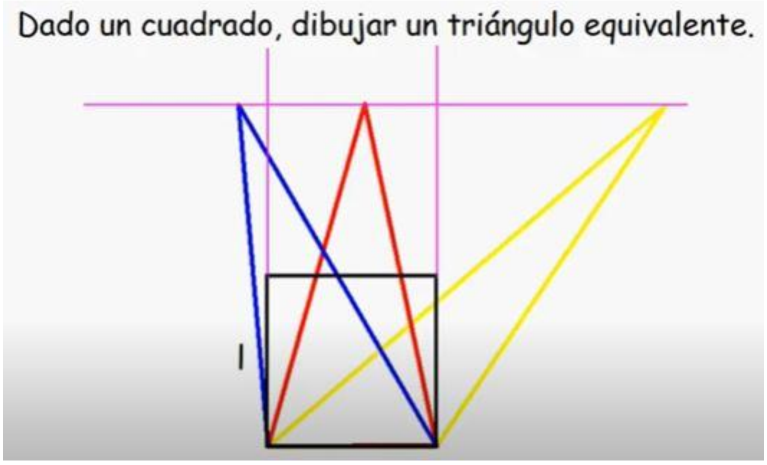
Problema 1. Dado un cuadrado, dibuja un triángulo equivalente (con la misma área que el cuadrado):

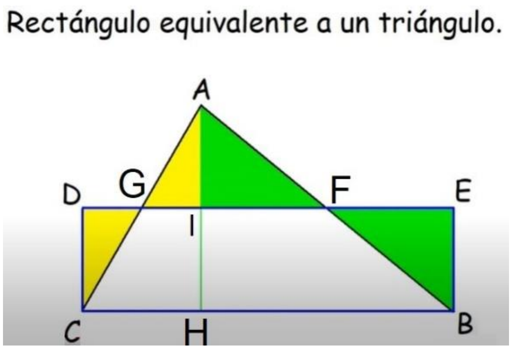


➯ https://www.youtube.com/watch?v=6RuZbYow1lQ

$A_{Cuadrado} = A_{Triángulo}$

$L^2 = \frac{b \cdot h}{2}$, pero b = L y h = 2L, por lo que son equivalentes.

Problema 2. Dado un triángulo, dibuja un rectángulo equivalente:



➯ https://www.youtube.com/watch?v=5w8qB-kgJiQ

Sea $\overline{AH}$ la altura que pasa por A. Los triángulos verdes AFI y FEB son semejantes por tener ángulos iguales (el ángulo $\widehat{AFI} = \widehat{EFB}$, tienen uno recto y el otro es complementario de $\widehat{AFI}$). Si, y sólo si, el segmento $\overline{AI}$ tiene la misma longitud que el segmento $\overline{IH}$ (un medio de la altura del triángulo ABC, h/2), los triángulos AFI y FEB son congruentes, ya que tienen un lado con la misma longitud y congruentes los ángulos contiguos a dicho lado (criterio de congruencia ALA). Lo mismo ocurre con los triángulos amarillos AGI y DGC.

$A_{Triángulo} = A_{Rectángulo}$

$\frac{b \cdot h}{2}$ = b·h' ($\frac{h}{2}$ = h'), de donde se deduce que la altura h' del rectángulo ha de ser h/2 (un medio de la altura del triángulo ABC) y su base b ha de coincidir con la del triángulo, por lo que son equivalentes.

Problema 3. Dado un rectángulo, dibuja un cuadrado equivalente:

$A_{Cuadrado} = A_{Rectángulo}$

$x^2 = b \cdot h$

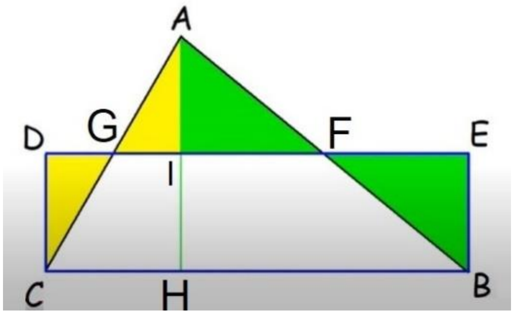
Luego, basta dibujar un cuadrado de lado x = $\sqrt{\mathrm{b} \cdot \mathrm{h}}$, la media geométrica de b y h, base y altura del rectángulo.

Problema 4. Dado un triángulo, dibuja un cuadrado equivalente:

Basta aplicar sucesivamente las soluciones de los problemas 2 y 3, esto es, construir primero un rectángulo equivalente al triángulo dado y, después, un cuadrado equivalente al rectángulo dibujado. En consecuencia, basta dibujar un cuadrado de lado x = $\sqrt{\mathrm{b} \cdot \frac{h}{2}}$, la media geométrica de b y h/2, base y un medio de la altura del triángulo.

Problema 5. Averigua qué forma debe tener un triángulo de modo que se pueda dividir en tres partes que se puedan utilizar para constituir la figura unión de un cuadrado y de un rectángulo con dos de sus lados de la misma longitud que cualquiera de los del cuadrado:

- Subcaso 1:



Sea $\overline{AH}$ la altura que pasa por A. Llamemos α al ángulo $\widehat{\mathrm{ABH}}$ y β al ángulo $\widehat{\mathrm{ACH}}$, h a la altura del triángulo ABC y L a la longitud del segmento $\overline{AB}$.

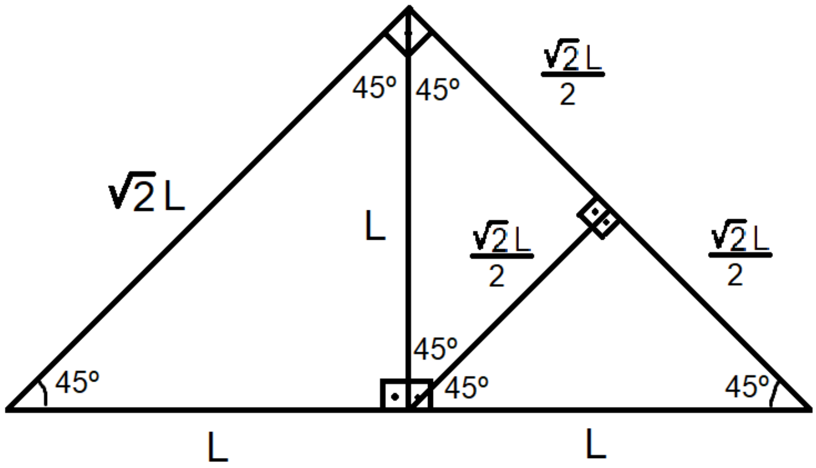
Para que el polígono IHBE sea un cuadrado y no un rectángulo se ha de dar que $\overline{HB} = \overline{HI}$; además, ha de darse que $\overline{HI} = \frac{h}{2}$ para que los triángulos verdes AFI y FEB (y los amarillos AGI y GDC) sean congruentes. Como tg α = $\frac{h}{\overline{HB}} = \frac{h}{h/2} = 2$, α = arctg (2) ≅ 63, 43495º.

Una alternativa sería emplear el teorema de Pitágoras: $L^2 = \overline{HB}^2 + h^2 = (h/2)^2 + h^2 = \frac{5}{4}h^2$, $L = \frac{\sqrt{5}}{2}h$, $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}L$ y luego que sen α = h/L, por lo que α = arcsen $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ ≅ 63, 43495º.

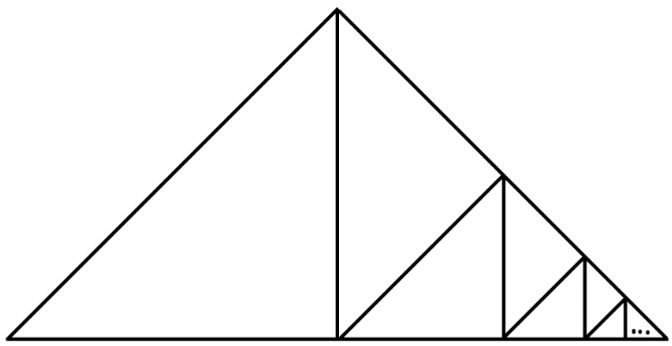
Así que para que el polígono IHBE sea un cuadrado y no un rectángulo se tiene que dar que α = arctg (2) ≅ 63, 43495º y para que el polígono IHCD sea un rectángulo y no un cuadrado se tiene que dar que β ≠ arctg (2) ≅ 63, 43495º.

- <u>Subcaso 2:</u> El triángulo es rectángulo isósceles.

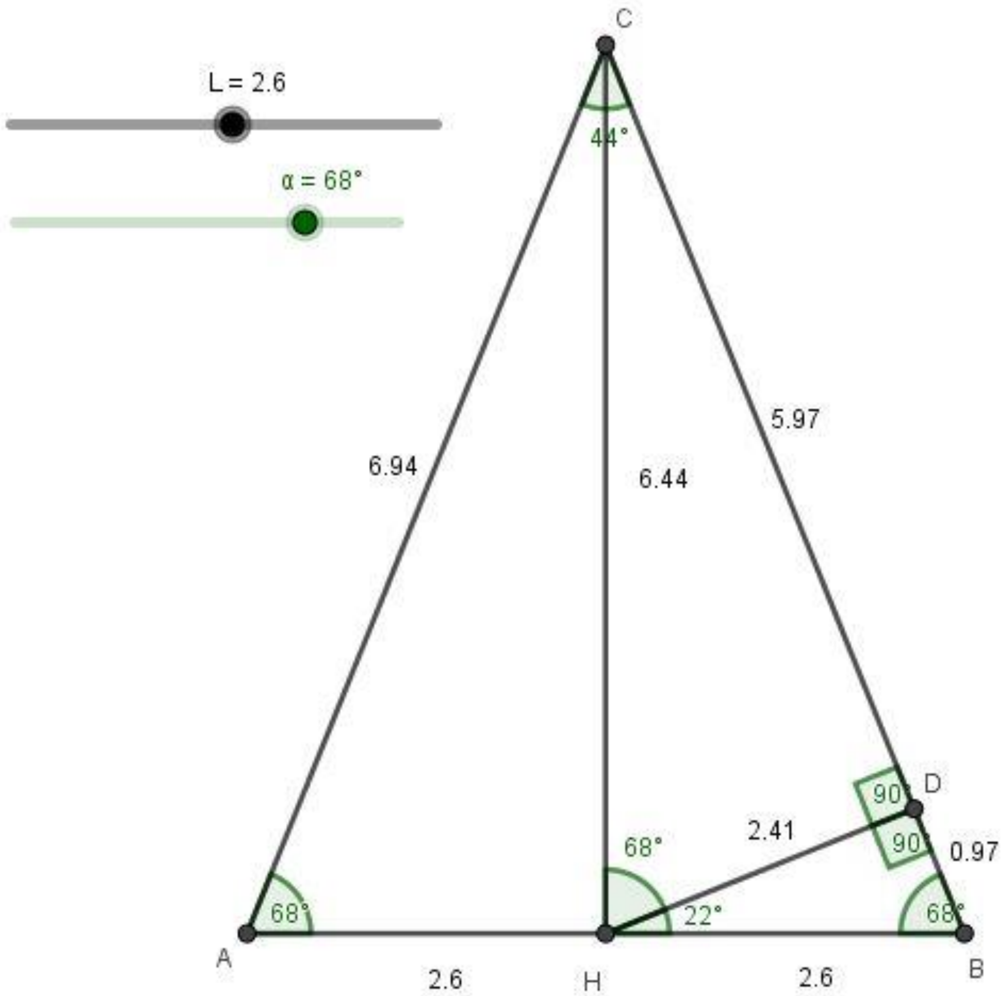
Si el triángulo es rectángulo isósceles, entonces —como consecuencia del 2º Teorema de Thales— su altura tiene la misma longitud que la mitad del lado desigual (la mitad de la hipotenusa), L. Además, la altura que pasa por el vértice del ángulo recto divide al triángulo en dos triángulos rectángulos isósceles congruentes (semejantes al original con razón de semejanza $\frac{\sqrt{2}}{2}$). Si aplicamos la misma idea a uno de ellos, obtenemos dos triángulos rectángulos isósceles congruentes (semejantes al original con razón de semejanza $\sqrt{2}$). Uniendo éstos por la hipotenusa, obtenemos un cuadrado cuyo lado mide $\frac{\sqrt{2}}{2}L$. Y si los unimos al triángulo rectángulo isósceles que no ha sido subdividido de modo que las hipotenusas de aquellos coincidan con los catetos de este, obtenemos un rectángulo de dimensiones $\sqrt{2}L \times \frac{\sqrt{2}}{2}L$. También se puede formar un cuadrado de lado L.

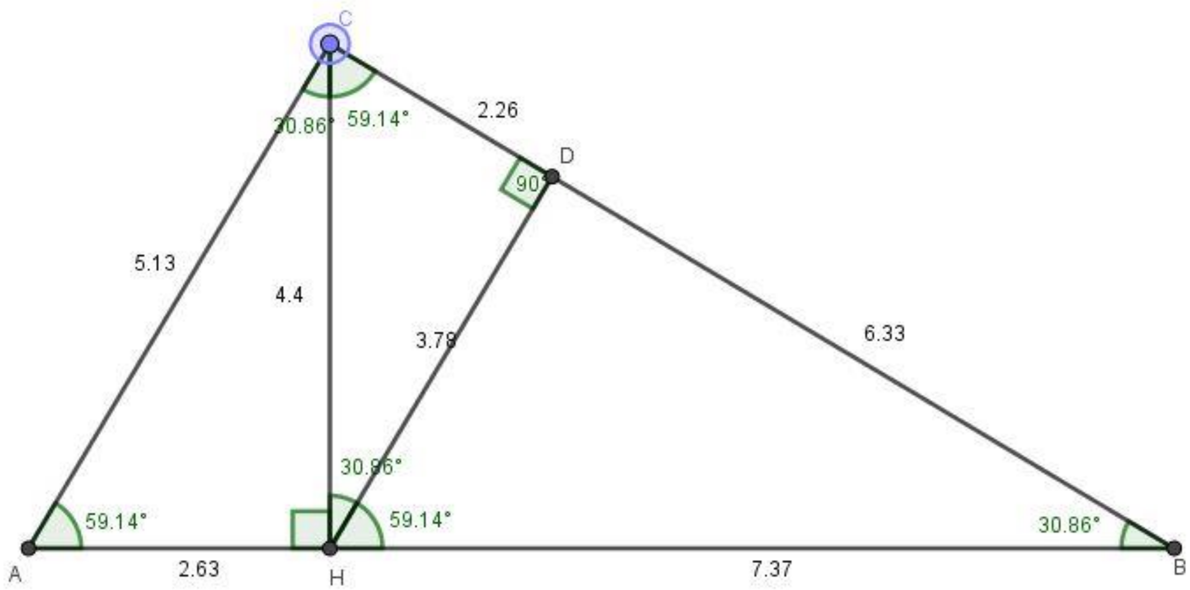


➯ <u>Observación:</u> Podríamos seguir el proceso subdividiendo y tendríamos un mayor número de piezas, pero cada vez más pequeñas. Con ellas se podría seguir formando un rectángulo y un cuadrado.



Si el triángulo es isósceles pero no rectángulo, o rectángulo pero no isósceles, entonces los dos últimos triángulos rectángulos que se obtienen de la subdivisión son semejantes (y no isósceles, ya que a mayor lado se opone mayor ángulo, y viceversa), pero no congruentes (sus hipotenusas no tienen la misma longitud —aunque tienen un cateto no homólogo con la misma longitud, el lado compartido, cuyos ángulos contiguos no son congruentes—), por lo que no podemos formar un cuadrado con ellos.





h = $\sqrt{L'^2 - L^2}$

h = L $\Leftrightarrow L' = \sqrt{2}L \Leftrightarrow$ El triángulo es rectángulo isósceles.

<u>Problema 6.</u> Averigua qué forma debe tener un triángulo de modo que se pueda dividir en tres partes que se puedan emplear para constituir la figura unión de dos cuadrados congruentes:

Es el mismo problema que el anterior (subcaso 1). Para que los cuadriláteros IHBE y IHCD sean un cuadrados y no rectángulos se tiene que dar que el triángulo ABC sea un triángulo isósceles cuyos dos lados iguales sean $\alpha = \beta = \text{arctg}(2) \cong 63,43495^{\circ}$.