# Teoría – Tema 5

# Teoría - 12 - cambio de variable par en el producto seno por coseno

## Cambio de variable si f(x) es par en el producto sen(x)·cos(x)

La función $f(x)$ que deseamos integrar es par en el producto seno por coseno si cumple que al sustituir simultáneamente $sen(x)$ por $-sen(x)$ y $\cos(x)$ por $-\cos(x)$ , la función no cambia de signo. En este caso el cambio de variable a realizar es:

$$tg(x)=t \quad \rightarrow \quad (1+tg^2(x))dx=dt \quad \rightarrow \quad dx=\frac{dt}{1+tg^2(x)} \quad \rightarrow \quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

Recordamos que la tangente, en un triángulo rectángulo, se obtiene como el cociente entre cateto opuesto y cateto contiguo. Si suponemos que el cateto contiguo vale la unidad, tendremos:

$tg(x)=\frac{t}{1}=t$ → El cateto opuesto mide $t$ y el cateto contiguo $1$ .

Por Pitágoras, la hipotenusa del triángulo rectángulo será $\sqrt{1+t^2}$ . Y podremos obtener los valores del seno y del coseno en función de $t$ , recordando que el seno es cateto opuesto partido hipotenusa y que el coseno es cateto contiguo partido hipotenusa.

$$sen(x)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Otra forma de demostrar estos valores es partiendo de la relación fundamental de la trigonometría que relaciona tangente y secante:

$$1+tg^2(x)=sec^2(x) \quad \rightarrow \quad 1+t^2=\frac{1}{\cos^2(x)} \quad \rightarrow \quad \cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)} \quad \rightarrow \quad sen(x)=tg(x)\cdot\cos(x) \quad \rightarrow \quad sen(x)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Encontraremos integrales donde podremos aplicar tanto este cambio como alguno de los vistos anteriormente. Solo la práctica nos dirá cuál es la mejor opción para resolver cada integral.

**Ejemplo 1 resuelto**

$$\int sen\,x \cdot \cos^3 x\,dx$$

$$tg\,x = t \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$sen(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\int sen\,x \cdot \cos^3 x\,dx = \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3 \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t}{(1+t^2)^3}\,dt = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2} + C$$

Deshacemos el cambio de variable en función de la tangente:

$$I = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{(1+tg^2 x)^2} + C$$

Que podemos expresar de forma más compacta si empleamos la relación del coseno con la nueva variable.

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \rightarrow \quad \cos^4(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4 = \frac{1}{(1+t^2)^2} \quad \rightarrow \quad I = \frac{-1}{4} \cdot \cos^4(x) + C$$

**¡Ojo!** En el anterior ejemplo podríamos haber aplicado el cambio de variable impar en seno y también el cambio de variable impar en coseno. Llegaríamos a soluciones perfectamente válidas.

Incluso podríamos resolver de manera inmediata, dándonos cuenta de una de las “ideas felices” que comentamos al principio del tema. Si derivamos la función coseno elevada a la cuarta potencia:

$$\frac{d}{dx}[\cos^4(x)] = 4 \cdot \cos^3(x) \cdot (-sen(x))$$

Si comparamos este resultado con $\int sen\,x \cdot \cos^3 x\,dx$ comprobamos que, dentro de la integral, tenemos todos los términos de la derivada salvo el factor $4$ y el signo negativo. Por lo tanto:

$$\int sen\,x \cdot \cos^3 x\,dx = \frac{-1}{4} \int (-4)\,sen\,x \cdot \cos^3 x\,dx = \frac{-1}{4} \cos^4(x) + C$$