Oživlé příklady z KABARA I.

https://www.geogebra.org/m/mzypchq6

KABAR-I-113 + 114 (Jeremiáška a Dl. Bidlo)

Jeremiáška má v kvartýru magickou kouli o hmotnosti 2,5 kg zavěšenou na hedvábné niti o délce 80 cm. Kouli považujte za hmotný bod, hmotnost niti a odpor $\mathcal{VBD}$ zanedbejte. Jakou tahovou silou je nit napínána (čiliž jaká je tíha G koule)

a) v klidu a míru v rovnovážné poloze?

b) v situaci, kdy ji Jeremiáška nejprve vychýlila o úhel $\alpha = 90°$, pak volně pustila a koule nyní prochází rovnovážnou polohou?

c) v situaci, kdy ji Jeremiáška nejprve vychýlila o úhel $\beta = 60°$, pak udělila kouli rychlost $2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ve směru kolmém k niti a koule nyní prochází rovnovážnou polohou?

KABAR-I-113 + 114 (Jeremiáška a Dl. Bidlo)

a) $\boxed{G = 2mg}$ $\boxed{G = 25\,\mathrm{N}}$

b) $\boxed{G = 3mg}$ $\boxed{G = 75\,\mathrm{N}}$

c) $\boxed{G = m\left(3g - 2g\cos\alpha + \frac{v_0^2}{\ell}\right)}$ $\boxed{G = 62{,}5\,\mathrm{N}}$

Řešení: $m = 2{,}5\,\mathrm{kg}$, $\ell = 0{,}80\,\mathrm{m}$, $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$, $v_0 = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $G = ?$

a) V **klidu** (obr. 1) je situace taková, že **výsledná síla působící na kouli je rovna nule**. To velí zákon setrvačnosti. Přitom na kouli působí dvě síly, a sicejc dolů síla tíhová $\overrightarrow{F_G}$ a nahoru síla niti $\overrightarrow{F_n}$. Páč je výslednice nulová, musí pro jejich velikosti platit

$$F_n = F_G \tag{a}$$

Reakcí k síle $\overrightarrow{F_n}$ je právě síla, kterou chceme určit, tedy síla, kterou koule natahuje nit. Této *tahové* síle říkáme, jak jistě víš, **tíha koule** a značíme ji obvykle $\overrightarrow{G}$. (Nit je na druhém konci napínána silou stropu $\overrightarrow{F_{strop}}$.) Síly akce a reakce mají stejnou velikost, tedy

$$F_n = G \tag{b}$$

Z (a) a (b) tedy plyne $G = F_G$. Přitom $F_G = mg$, pročež

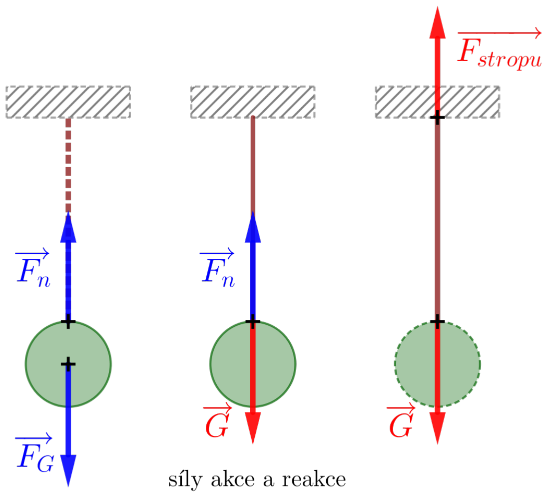
$$\boxed{G = mg} \tag{c}$$

Nit je napínána tahovou silou (tíhou koule)

$$G = 2,5 \cdot 10 = \boxed{25\,\mathrm{N}}$$

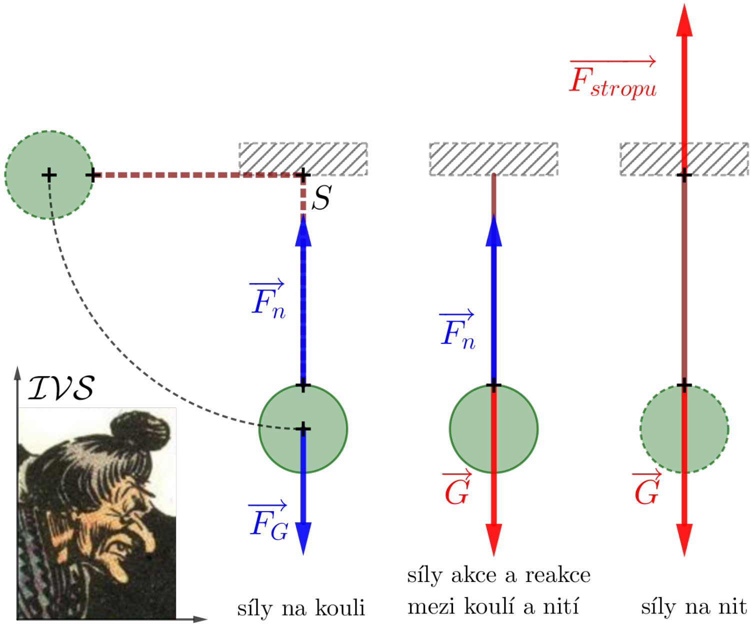
Poznámka. Kdyby koule nebyla zavěšená, ale ležela na podložce, potom by její tíhou $\overrightarrow{G}$ byla *tlaková* síla, kterou by tlačila na podložku. V klidu by samo-litr vyšlo také, že $G = 25\,\mathrm{N}$.

b) V **pohybu** bude situace úplně zásadně jiná, to ti garantuji!
Úlohu vyřešíme dvěma způsoby:
1) z pohledu pozorovatele spojeného se *zemí* (z pohledu $\mathcal{IVS}$)
2) z pohledu pozorovatele spojeného s *koulí* (z pohledu $\mathcal{NVS}$)



Obr. 1: Koule v klidu

1) **Pozorovatel spojený se zemí – Jeremiáška**:
Koule se z tohoto pohledu pohybuje **po kružnici**. Z toho, že koule není nyní v naší vztažné soustavě v klidu (ani v $\mathcal{RPP}$) plyne, že výsledná síla na kouli **nemůže být nyní nulová** (na rozdíl od případu a))!
Přitom je to pohyb nejprve *zrychlený* a po průchodu rovnovážnou polohou je pohyb koule *zpomalený*. V *rovnovážné poloze* (obr. 2) ale můžeme říci, že pohyb je na nekonečně krátký okamžik **rovnoměrným pohybem po kružnici**. Díky tomu můžeme v této speciální poloze říci, že **výslednou silou**, která působí na kouli, je síla **dostředivá**, která míří do středu kruhové trajektorie koule a nutí kouli zatáčet. (V ostatních bodech trajektorie musí výsledná síla též měnit velikost rychlosti, takže do středu S nemíří.)
Je-li nyní výslednice nenulová, nemohou už mít oba vektory $\overrightarrow{F_G}$ a $\overrightarrow{F_n}$ stejnou velikost (jako v obr. 1). Páč gravitace se



Obr. 2: Pohled z hlediska soustavy země ($\mathcal{IVS}$): koule v pohybu

nezměnila, je tíhová síla $\overrightarrow{F_G}$ stejná jako v klidu, musela se tedy změnit síla niti $\overrightarrow{F_n}$ a má-li mířit výslednice do S, musí se síla niti **zvětšit** (viz obr. 2)! Je to logické, páč nit musí nyní nejen držet kouli jako když byla v klidu, ale navíc ji musí trochu krotit, tu divošku, a nutit ji zatáčet.
Esliže je nyní síla niti $\overrightarrow{F_n}$ větší, musí být větší i reakce k ní, tedy tíha koule $\overrightarrow{G}$. Vo kolik? No to už je nyní πsof-kchejk: Pro výslednici dle obr. 2 platí

$$F_v = F_n - F_G$$

Přitom víme, že výslednicí je dostředivá síla, dále a že $F_n = G$. Proto dostáváme

$$F_{do} = G - F_G$$

Tudíž pro tíhu koule vychází

$$\underline{G = mg + F_{do}} \tag{d}$$

Vidíme, že tíha koule a tedy i napětí niti je nyní vskutku větší než v klidu, a sicejc o velikost dostředivé síly! (srovnej se vztahem (c))

Nyní musíme ještě najít velikost dostředivé síly. Dostředivá síla je dána vztahem $\frac{mv^2}{r}$. Za r můžeme dosadit délku nitě ℓ (kouli máme považovat za hmotný bod):

$$F_{do} = \frac{mv^2}{\ell} \tag{e}$$

Zbývá zjistit rychlost koule v rovnovážné poloze. No a ktomu nám dopomáhej $\mathcal{ZZME}$: Potenciální energie koule v nejvyšší poloze se beze zbytku přemění na kinetickou energii koule při průchodu rovnovážnou polohou:

$$\begin{aligned} mg\ell &= \frac{1}{2}mv^2 \\ \cancel{m}g\ell &= \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \\ v^2 &= 2g\ell \end{aligned} \tag{f}$$

Dosadíme (f) do (e), délka ℓ se vykrátí a jsme doma:

$$F_{do} = \frac{m \cdot 2g\cancel{\ell}}{\cancel{\ell}} = 2mg \tag{g}$$

Vztah (e) frkneme do (d) a dostáváme:

$$G = mg + 2mg = \boxed{3mg} = \boxed{75\,\mathrm{N}} \tag{h}$$

Dostali jsme fascinující výsledek. Nit je napínána v pohybu 3× *větší silou než v klidu. Tíha tělesa je tedy* 3× *větší, přestože hmotnost se nezměnila!*

2) **Pozorovatel spojený s koulí – Dlouhý Bidlo**:
Tak hele, Dlouhý Bidlo slídil u Jeremiášky a sedl si na tu kouli. Nyní to bude jeho popis! A budou tu dva důležité rozdíly oproti popisu Jeremiášky!
Za prvé – Bidlo je v soustavě spojené s koulí, takže koule je pro něj **v klidu**. Výslednice na kouli proto z jeho pohledu musí být **nulová**.
Za druhé – Bidlo je v **neinerciální** vztažné soustavě, takže kromě reálných sil působí na kouli ještě **síla setrvačná odstředivá** $\overrightarrow{F_{os}}$. To o jednu sílu navíc než v $\mathcal{IVS}$.
Tyto dva rozdíly v popisu se vykompenzují, takže Bidlo dostane pro tíhu G magické koule stejný výsledek jako Jeremiáška:

$$\overrightarrow{F_v} = \overrightarrow{0}$$

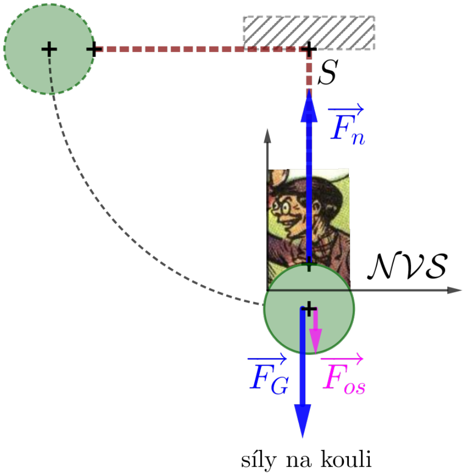
Skalárně to znamená (viz obr. 3):

$$F_n = F_G + F_{os}$$

Ale páč $F_n = G$ a $F_G = mg$, dostáváme

$$\underline{G = mg + F_{os}} \tag{i}$$

Ty jo, nechceš to porovnat se vztahem (d)? Co tomu říkáš? Že to je skoro totéž.
– Při popisu v $\mathcal{IVS}$ šlo o **pohyb po kružnici** a figurovala tam tudíž *dostředivá* síla, která to nutila zatáčet a přičítala se k tíhové síle mg.
– Při popisu v $\mathcal{NVS}$ jde o **klid** a figuruje tu *odstředivá* síla, která zajišťuje nulovou výslednici a onen klid a přičítá se k tíhové síle mg.
Bacha, aby sis nemyslela, že síla *dostředivá* a síla *odstředivá* jsou nějaké síly akce a reakce! To by mě opravdu moc mrzelo.
– Síla dostředivá je tvořena **reálnými** silami (tíhovou silou



Obr. 3: Pohled z hlediska soustavy koule ($\mathcal{NVS}$): koule je v klidu!

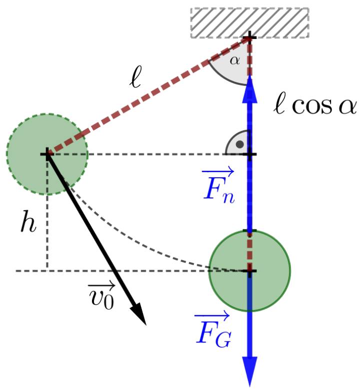
– i když to je složenina reálné gravitační s odstředivou setrvačnou vznikající rotací Země – takže je reálná jen zčásti + silou nitě)
– Síla odstředivá je síla **zdánlivá** (a nemá reakci), existuje jen z hlediska $\mathcal{NVS}$ a přidává se k oběma zmíněným silám reálným. – Nicméně obě tyto, jinak tak rozdílné síly, mají jednu věc společnou, a to velikost. Odstředivá setrvačná síla se počítá podle stejného vztahu jako síla dostředivá:

$$F_{os} = \frac{mv^2}{r}$$

Proto dosazením do (i) dostáváme i při popisu z hlediska Bidloně stejný výsledek jako při popisu z hlediska Jeremiášky:

$$\boxed{G = 3\,mg} = \boxed{75\,\mathrm{J}}$$

Poznámka. Tíha magické koule je v pohybu třikrát větší než v klidu. Tomuto stavu říkáme stav **přetížení** a tento stav pociťuje nejen ta koule, ale i Dlouhé Bidlo, který se na kouli houpe. Zdá se mu, jakoby toto přetížení bylo způsobeno tím, že někdo otočil knoflíkem a třikrát zvětšil gravitaci. Tedy, že hodnota tíhového zrychlení není g jako normálně, ale je $3\,g$. Říkáme, že Bidlo je vystaven **přetížení 3 $\boldsymbol{g}$**. Ve skutečnosti není toto přetížení způsobeno zvýšením gravitace, ale *zrychleným pohybem*. Koule má přeci v $\mathcal{RP}$ dostředivé zrychlení a_{do} vyvolané dostředivou silou.



Obr. 4

c) Postup bude analogický jako v b), jen musíme započítat ještě počáteční kinetickou energii, když do koule teď Jeremiáška strčila. Úlohu budeme řešit nyní jen v $\mathcal{IVS}$ (viz obr. 4).
Použijeme již odvozený vztah (d):

$$G = mg + F_{do} = mg + \frac{mv^2}{\ell} = m\left(g + \frac{v^2}{\ell}\right) \tag{j}$$

Nyní potřebujeme opět určit pomocí $\mathcal{ZZME}$ rychlost v v $\mathcal{RP}$

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$
\begin{aligned}
gh + \frac{1}{2}v_0^2 &= \frac{1}{2}v^2 \\
v^2 &= 2gh + v_0^2 \qquad \text{(k)}
\end{aligned}
$$

Přitom z obr. 4 je vidět, že $h = \ell - \ell\cos\alpha = \ell(1-\cos\alpha)$. To dosadíme do (k):

$$
v^2 = 2g\ell(1-\cos\alpha) + v_0^2 \qquad \text{(l)}
$$

Nyní můžeme dosadit (l) do (j) a trochu to upravit:

$$
\begin{aligned}
G &= m\left(g + \frac{2g\ell(1-\cos\alpha) + v_0^2}{\ell}\right) \\
G &= m\left(g + \frac{2g\cancel{\ell}(1-\cos\alpha)}{\cancel{\ell}} + \frac{v_0^2}{\ell}\right) \\
G &= m\left(g + 2g - 2g\cos\alpha + \frac{v_0^2}{\ell}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{G = m\left(3g - 2g\cos\alpha + \frac{v_0^2}{\ell}\right)}
$$

Musíme uznat, že je to nádhera! Všimněme si, že pro $v_0 = 0$ a $\alpha = 90°$ dostaneme $G = 3g$, páč $\cos 90° = 0$ a poslední dva členy v závoře vypadnou. To je v souladu s výsledkem v části a)!

Ještě **číselně**:

$$
G = 2,5\left(3\cdot 10 - 2\cdot 10\cdot\cos 60° + \frac{2^2}{0,8}\right) = 2,5(30 - 10 + 5)
$$

$$
\boxed{G = 62{,}5\,\mathrm{N}}
$$

Poznámka. Srovnání b) a c). V části b) vyšla tíha koule $G = 75\,\mathrm{N}$, kdežto v c) vyšla tíha jen $G = 62{,}5\,\mathrm{N}$. Proč? No Jeremiáška do koule nyní sice strčila (hodnota $+5$ v poslední závorce výše), ale kouli zvedla do menší výšky (hodnota -10 v poslední závorce výše). Menší zvednutí mělo větší vliv než postrčení.