Cálculo Diferencial e Integral III – Aula 1 (26 Jul 2017)

QUIZ (aula ao vivo) – Professor Azuaite Schneider

Questão 1

Observando os valores da sequência

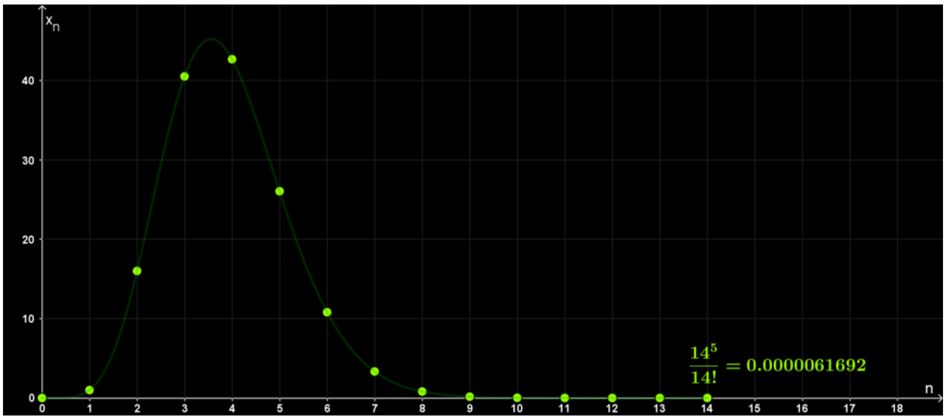
$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{n^5}{n!}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

é possível conjecturar que x_n:

A) diverge, pois seus valores crescem indefinidamente.
B) converge para 1.
C) converge para 0.
D) converge para 10,8.
E) diverge, pois seus valores diminuem indefinidamente.

Resposta correta: C.

Feedback: Observando o gráfico da sequência no applet on-line (disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qKCfBvj5>) é possível perceber que, apesar de um crescimento grande nos primeiros termos, a sequência tende a zero. Pode-se pensar também que $n!$ tende ao infinito "mais rápido" que n^5.



Questão 2

Pela definição formal de convergência de sequências numéricas, dizemos que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se para qualquer número $\varepsilon > 0$ existir um número real a e um índice n_0 tais que

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon.$$

Seguindo essa definição formal, tomando $\varepsilon = 0.1$, **qual o menor valor de n_0 para satisfazer a definição de convergência da sequência**

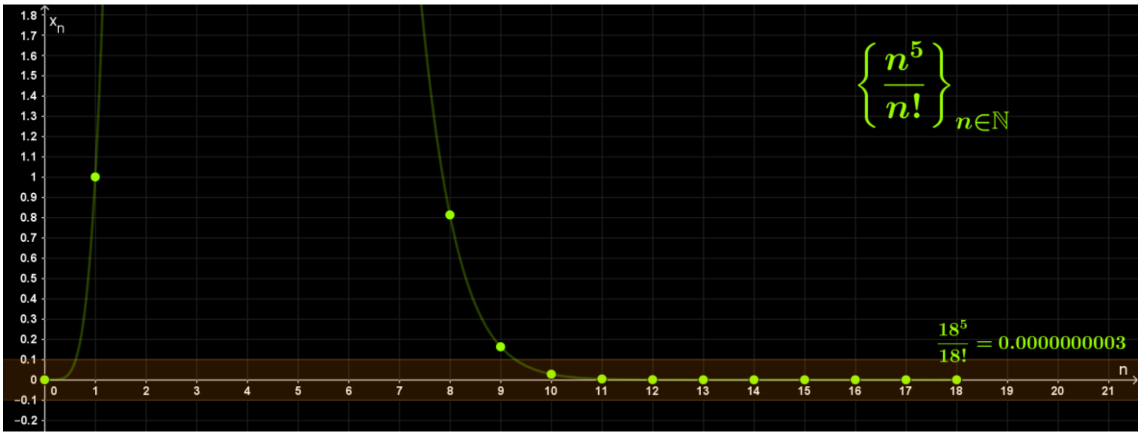
$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{n^5}{n!}\right\}_{n\in\mathbb{N}},$$

ou seja, qual o menor índice a partir do qual os elementos da sequência estão a uma distância menor do que $\varepsilon = 0.1$ do limite que você descobriu na questão anterior?

A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12

Resposta correta: C.

Feedback: Basta mais uma vez observar que a partir do décimo termo todos os termos estão a uma distância menor do que $\varepsilon = 0.1$ do limite que, como vimos na questão anterior, é zero. Fica claro no applet que se $n \geq n_0 = 10$, teremos que $|x_n - 0| < \varepsilon = 0.1$, ou seja, os termos estão dentro da faixa $(-\varepsilon, \varepsilon)$, faixa de cor laranja.



Questão 3

Cinco alunos de Cálculo III – Ana, Bruna, Cibele, Douglas e Eduardo – se depararam com o seguinte problema:

"Considere $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos tal que

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1}.$$

Qual é o valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$?"

Todos resolveram e quando foram comparar as respostas descobriram que haviam obtido respostas diferentes: Ana disse que o limite era infinito; Bruna chegou a conclusão de que o limite era 0; Cibele determinou que o limite é igual ao primeiro termo da sequência, no caso x_0; Douglas chegou que o limite vale 1; Eduardo disse que o limite é igual a e. **Qual deles acertou?**

A) Ana

B) Bruna

C) Cibele

D) Douglas

E) Eduardo

Resposta correta: B.

Feedback: Observe que se abrirmos os termos da sequência vamos chegar que seu termo geral pode ser escrito como

$$x_n = \frac{x_0}{(n+1)!}.$$

Obviamente quando n tende ao infinito teremos que a sequência converge para zero.

$$\begin{array}{rclcl}
x_1 & = & \dfrac{x_0}{0+1} & = & \dfrac{x_0}{1} \\
x_2 & = & \dfrac{x_1}{1+1} & = & \dfrac{x_1}{2} \\
x_3 & = & \dfrac{x_2}{2+1} & = & \dfrac{x_2}{3} \\
x_4 & = & \dfrac{x_3}{3+1} & = & \dfrac{x_3}{4} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_{n+1} & = & \dfrac{x_n}{n+1} & & \\
\vdots & & \vdots & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rclcl}
x_1 & = & \dfrac{x_0}{1} & = & \dfrac{x_0}{1!} \\
x_2 & = & \dfrac{\frac{x_0}{1}}{2} & = & \dfrac{x_0}{2!} \\
x_3 & = & \dfrac{\frac{x_0}{2!}}{3} & = & \dfrac{x_0}{3!} \\
x_4 & = & \dfrac{\frac{x_0}{3!}}{4} & = & \dfrac{x_0}{4!} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_{n+1} & = & \dfrac{\frac{x_0}{n!}}{n+1} & = & \dfrac{x_0}{(n+1)!} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Questão 4

Um caso muito comum de séries numéricas em que é fácil determinar se a soma converge ou diverge é o das séries geométricas. Nestes casos, além de ser fácil dizer que converge, é fácil dizer qual o limite da soma infinita. Uma série geométrica é da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^k \text{, onde } a \in \mathbb{R}.$$

A série só converge quando a razão a satisfaz uma certa condição. Sabendo disso, analise as seguintes afirmações:

I. A série geométrica dada acima converge quando $|a| < 1$.

II.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

III.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{2}} = -2$$

IV. Se a série geométrica $\sum a^k$ converge, então também converge a série $\sum c\, a^k$, para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$.

É correto o que se afirma em

A) I e II, apenas.
B) I e IV, apenas.
C) I, II e III, apenas.
D) I, II e IV, apenas.
E) I, II, III e IV.

Resposta correta: D.

Feedback: A única incorreta é a III pois a razão é maior que 1.

Foi abordado na aula ao vivo o critério de convergência de séries geométricas, mas você pode analisar geometricamente em quais casos ocorre a convergência, basta acessar o applet on-line (disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qKCfBvj5>), no capítulo I, e testar alguns valores para a razão da série geométrica e ver o que acontece com a soma.

Questão 5

Sabe-se que, para todo número inteiro n>1, tem-se

$$\frac{n\sqrt[n]{e}}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n\sqrt[n]{ne}}{e}.$$

Neste caso, **quanto vale o limite a seguir:**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}?$$

Dica: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ e lembre-se que $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

A) 0
B) 1/e
C) 1
D) e
E) infinito

Resposta correta: 1/e

Feedback: O primeiro passo é dividir a desigualdade toda por n, obtendo então:

$$\frac{\sqrt[n]{e}}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{\sqrt[n]{ne}}{e}$$

A sequência "ensanduichada" entre as outras duas é a sequência que queremos calcular o limite. No applet você pode observar os gráficos das sequências e perceber que realmente a desigualdade acontece e que as duas sequências externas tem o mesmo limite, que é 1/e. Pelo teorema do Confronto (ou como é conhecido, Teorema do Sanduíche) temos que a sequência do meio também deve convergir para 1/e.

Mas como sabemos que as duas sequências extremas convergem para 1/e????

Considerando a da esquerda, vamos reescrevê-la da seguinte forma

$$\frac{\sqrt[n]{e}}{e} = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e}.$$

Quando $n \to \infty$, obviamente o expoente tende a zero, então o limite é 1/e.

Para a sequência da direita acabamos recaindo no limite anterior, pois

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{ne}}{e} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(ne)^{1/n}}{e} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e} = 1 \cdot \frac{1}{e}.$$

Bastava, no entanto, observar geometricamente para intuir a resposta: