2. Kritische Punkte

DEFINITION (Notwendiges Kriterium eines kritischen Punkts)

Einen Punkt $P(x_0|f(x_0))$ nennen wir einen kritischen Punkt einer Funktion f, wenn gilt:

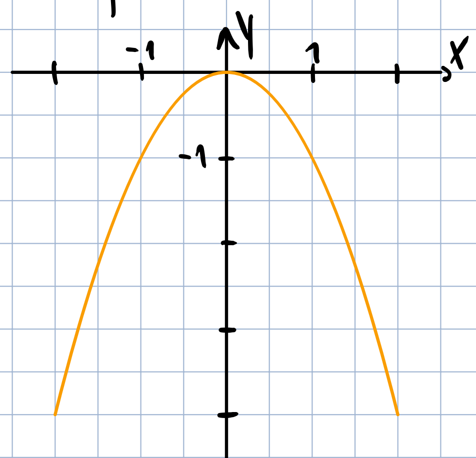
$$f'(x_0) = 0.$$

Wir unterscheiden drei verschiedene Arten von kritischen Punkten (hier bei $x_0 = 0$):

Lokaler Extrempunkt

Lokaler Hochpunkt

z.B. $f: x \longmapsto -x^2$



→ Änderung der Monotonie von sms zu smf

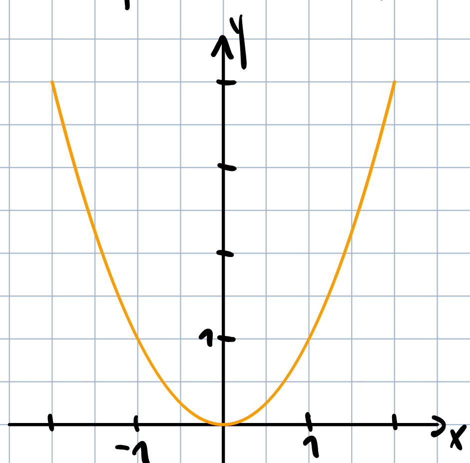
→ Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach −

→ Graph ist in der Umgebung nur rechtsgekrümmt

→ $f''(x_0) < 0$

Lokaler Tiefpunkt

z.B. $f: x \longmapsto x^2$



→ Änderung der Monotonie von smf zu sms

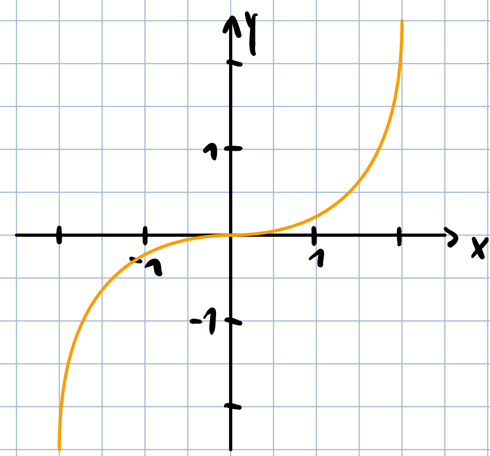
→ Vorzeichenwechsel der Ableitung von − nach +

→ Graph ist in der Umgebung nur linksgekrümmt

→ $f''(x_0) > 0$

Terrassenpunkt

z.B. $f: x \longmapsto \frac{1}{4}x^3$



→ Monotonie bleibt über kritischen Punkt hinaus erhalten

→ Kein Vorzeichenwechsel der Ableitung (Berührpunkt bei $G_{f'}$)

→ Graph ändert Krümmungsverhalten in $P(x_0|f(x_0))$

→ $f''(x_0) = 0$

ACHTUNG

Ein lokaler Hoch- bzw. Tiefpunkt muss nicht der höchste oder tiefste Punkt des ganzen Graphen G_f sein, sondern es genügt, wenn es ein Intervall

$I = [a;b]$ mit $a < x_0 < b$ gilt mit ...

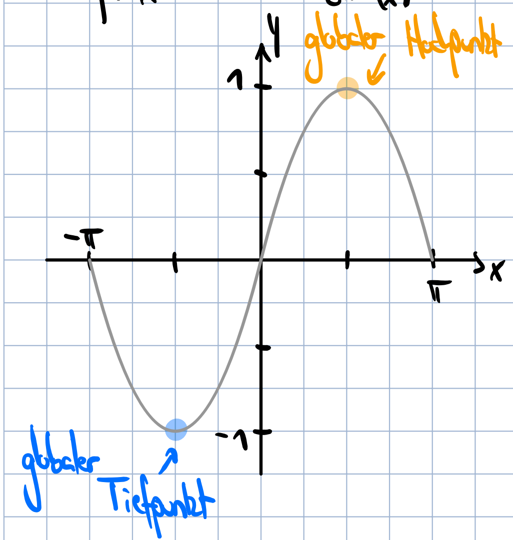
... $f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in I$ für einen lokalen Hochpunkt bzw.

... $f(x_0) < f(x)$ für alle $x \in I$ für einen lokalen Tiefpunkt.

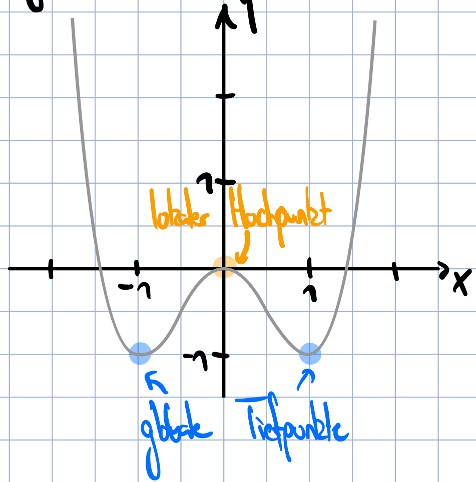
Gilt jedoch $f(x_0) \le f(x)$ bzw. $f(x_0) \ge f(x)$ für alle $x \in D_f$, so nennen wir den Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ globales Minimum bzw. Maximum.

Beispiele:

$f: x \longmapsto \sin(x)$



$g: x \longmapsto x^4 - 2x^2$



$h: x \longmapsto x \cdot \cos(x)$