Problemas sobre punto crítico y extremo relativo

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	Derivadas	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Sea la función $f(x) = x^2 - 8 \cdot \ln(x)$ definida en el dominio $[1, +\infty]$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, calcula los extremos relativos de la función y obtén el valor de la ordenada en cada extremo.

La condición necesaria de extremo relativo es anular la primera derivada.
Los puntos que cumplen esta condición son los llamados puntos críticos.
$f(x) = x^2 - 8 \cdot \ln(x) \to f'(x) = 2x - \frac{8}{x} \to f'(x) = \frac{2x^2-8}{x}$
$f'(x) = 0 \to x = \pm 2 \to$ puntos críticos

Recordamos que la función está definida en $[1, +\infty]$, por lo que solo tomamos como punto crítico el valor positivo $x = 2$.
Como condición suficiente de extremo relativo, evaluamos la derivada alrededor de este punto crítico, recordando que la función está definida a partir del valor $x = 1$ tal y como indica el enunciado.

Función $f(x)$	$f(x) \downarrow$	$f(x) \uparrow$
Intervalos	$(1,2)$	$(2, +\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(\frac{3}{2}) < 0$	$f'(10) > 0$

En $x = 2$ tenemos un mínimo relativo. Las coordenadas del mínimo son: $(2, 4 - 8\ln(2))$.
Estrictamente decreciente en $(1,2)$. Estrictamente creciente en $(2, +\infty)$.

PROBLEMA 2

Sea $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$. Hallar los extremos relativos y la ecuación explícita de la recta tangente en el punto $x = e$.

a) La condición necesaria de extremo relativo es que la primera derivada se anule.

$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$, $f'(x) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ punto crítico.

Calculamos la segunda derivada y evaluamos en ella el punto crítico como condición suficiente.

$f''(x) = \frac{x^2-(-1+x)2x}{x^4} = \frac{x-(-1+x)2}{x^3} = \frac{-x+2}{x^3}$, $f''(1) = \frac{-1+2}{1} = 1 > 0$

Conclusión: $x = 1$ es un mínimo relativo, de imagen $f(1) = 1$.

En $x = e$ la imagen resulta $\rightarrow f(e) = \frac{1}{e} + \ln(e) = \frac{1}{e} + 1 = \frac{1+e}{e}$. La derivada de la función en $x = e$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$f'(x) = \frac{-1+x}{x^2} \rightarrow f'(e) = \frac{e-1}{e^2}$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente resulta:

$\frac{y-\frac{1+e}{e}}{x-e} = \frac{e-1}{e^2} \rightarrow y = (\frac{e-1}{e^2})x - \frac{e-1}{e} + \frac{1+e}{e} \rightarrow y = (\frac{e-1}{e^2})x + \frac{1-e}{e} + \frac{1+e}{e}$

Ecuación general de la recta tangente: $y = (\frac{e-1}{e^2})x + \frac{2}{e}$