Teoría – Tema 3

Teoría - 7a - potencia en binómico - Binomio de Newton

Potencias de números complejos en forma binómica

Si tenemos un número complejo expresado en forma binómica y lo elevamos a una potencia m , por lo general deberemos hacer uso del **binomio de Newton** para desarrollar la potencia.

La forma del binomio de Newton es bien conocida para potencias pequeñas $(0,1,2,3...)$, pero para potencias mayores la expresión final se complica.

$$(x+y)^0=1$$
$$(x+y)^1=x+y$$
$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=x^4+...$$

Los valores x, y del binomio pueden expresar números, expresiones algebraicas, etc. En complejos representarán la parte real y la parte imaginaria.

La forma general del binomio de Newton para cualquier potencia m nos da una expresión unificada para desarrollar el binomio. Las potencias de los valores x, y están relacionadas con los coeficientes que los acompañan, por lo que el binomio de Newton queda expresado de la siguiente manera:

$$(x+y)^m=\binom{m}{0}x^m+\binom{m}{1}x^{m-1}y+\binom{m}{2}x^{m-2}y^2+\binom{m}{3}x^{m-3}y^3+...+\binom{m}{m-1}xy^{m-1}+\binom{m}{m}y^m$$

¿Qué es la expresión $\binom{m}{n}$, con $m\geqslant n$? Es el conocido como **número combinatorio**, que cumple las siguientes propiedades:

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}, \quad m\geqslant n$$
$$n!\equiv n \ \ factorial$$
$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot3\cdot2\cdot1 \ \rightarrow \ \binom{m}{0}=1 \ , \ \binom{m}{1}=m \ , \ \binom{m}{m}=1$$

En la web de la asignatura encontrarás más información teórico-práctica sobre el binomio de Newton y su aplicación a los complejos en notación binómica: $(a+bi)^m$.

Por definición, consideraremos $0!=1$.

Ejemplo 1 resuelto

Desarrollo del binomio de Newton a la cuarta potencia, aplicado a un número complejo $z=a+bi$ **.**

$$(a+bi)^4=\binom{4}{0}a^4+\binom{4}{1}a^3(bi)+\binom{4}{2}a^2(bi)^2+\binom{4}{3}a(bi)^3+\binom{4}{4}(bi)^4$$

$$(a+bi)^4=a^4+4\cdot a^3\cdot bi+6\cdot a^2\cdot(bi)^2+4\cdot a\cdot(bi)^3+(bi)^4$$

$$(a+bi)^4=a^4+4\cdot a^3\cdot bi-6\cdot a^2\cdot b^2-4\cdot a\cdot b^3 i+b^4$$

$$(a+bi)^4=a^4+b^4-6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot(a^3\cdot b-a\cdot b^3)i$$

Con este ejemplo intuimos lo tedioso que resulta aplicar potencias a un complejo en notación binómica. ¿Qué hacemos?... En breve veremos la notación polar para complejos, que nos facilitará esta ardua tarea.