

Rudolf Sträßer – Hans-Jürgen Elschenbroich  
**Minisymposium RAUMgeometrie  
mit digitalen Werkzeugen**

## **Zeitplan**

### **Mittwoch** ab 8:30

- *Sträßer & Elschenbroich*: Handeln im Dreidimensionalen
- *Strunk & Hattermann*: Orthogonalität im Raum mit Werkzeugen erfahren und verstehen

### **Freitag** ab 9:00

- *Platz*: Algorithmen, ethische Matrizen und Würfelgebäude
- *Dutkowski*: Archimedische Körper - Faszination und Objekte zur Re-geometrisierung des Geometrieunterrichtes
- *Müller-Sommer*: Zur räumlichen Satzgruppe des Pythagoras
- *Wachter*: Über digitale Zeichnungen zum realen Modell: 3D-Modellierung und -Druck in der Raumgeometrie

Rudolf Sträßer – Hans-Jürgen Elschenbroich

# **Handeln im Dreidimensionalen**

im Minisymposium RAUMgeometrie mit digitalen Werkzeugen

## **Struktur**

- 1 Unterricht von (Raum-)Geometrie**
- 2 Computer-Einsatz im Geometrie-Unterricht**
- 3 Software-Typen für die Raumgeometrie**
- 4 Beispiele**
- 5 Ausblick: Konstruieren im Raum**

[www.geogebra.org/m/f7ha4ftw](http://www.geogebra.org/m/f7ha4ftw)



# 1.1 Warum RAUMgeometrie?

## Erfassung des Raumes

„Geometrie auf der niedrigsten, der nullten Stufe ist [...] die Erfassung des Raumes, [...] in dem das Kind lebt, atmet, sich bewegt, den es kennenlernen muss, den es erforschen und erobern muss, um besser in ihm leben, atmen und sich bewegen zu können“ (Freudenthal 1973, S. 376 f.)

Geometrie heißt übersetzt **Vermessung der Erde**.

Also: räumliche Geometrie müsste unterrichtet werden.

## 1.2 Geometrieunterricht (in der Ebene)

Weiterführende Schulen: Geometrie = ebene Geometrie.

Die Probleme in der Ebene sind oft einfacher als im Raum und die Handhabung entsprechender Werkzeuge ist auch einfacher.

Einsatz von Zirkel und Lineal in der ebenen Geometrie ist einfach verglichen mit den oft komplexen Verfahren der Darstellenden Geometrie für 3D-Probleme.

(Elschenbroich & Sträßer, 2024a, S. 8)

Aber: Eine axiomatische Fundierung des Geometrie-Unterrichtes in allgemeinbildenden Schulen mindestens ist für die Lernenden **ungeeignet**

**Was ändert sich mit dem Einsatz digitaler Werkzeuge im RAUMgeometrie-Unterricht?**

## 1.3 Raumgeometrie in der allgemeinbildenden Schule

Für die allgemeinbildende Schule kann man feststellen:

„Hier beschränkt sich in der Sekundarstufe I die Raumgeometrie weitgehend auf das Rechnen mit Formeln (insbesondere für Oberfläche und Volumen), während in der Analytischen Geometrie der Sekundarstufe II das vektorielle Rechnen mit Geraden und Ebenen, die ‚Hieb-und-Stich-Aufgaben‘, dominieren.“  
(Elschenbroich & Sträßer, 2024, S. 2)

Deskriptive Geometrie in Deutschland?

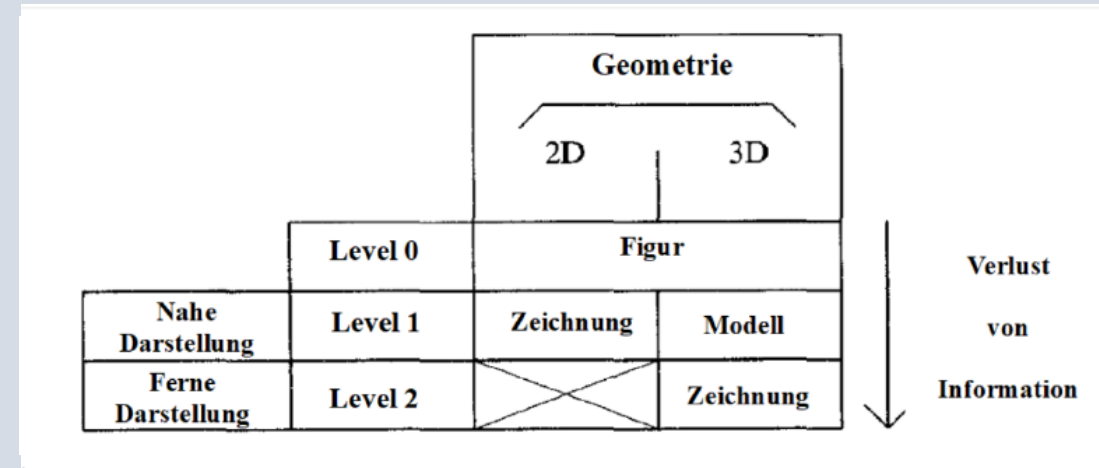
Geometrie in Österreich?

## 2.1 *Zeichnung* und *Modell* in der Raumgeometrie

3D-DGS & 3D-CAD:

**Bisher:** Erschließung des Raumes durch Basteln von „Modellen“ oder durch komplexe Verfahren von Darstellender Geometrie und Technischem Zeichnen, um dreidimensionale Objekte auf dem Zeichenblatt zu konstruieren.

Also: Unterscheidung von „Zeichnung“ und „Modell“.



Parzysz (1988), S. 80; Elschenbroich & Sträßer, 2024, S. 5

**Heutzutage:** digitale Werkzeuge können beide Aspekte miteinander verbinden sie arbeiten intern mit einem virtuellen dreidimensionalen Modell, das sie automatisiert in eine Zeichnung auf dem Bildschirm übersetzen.

Der 3D-Druck baut eine Brücke, indem er aus dem digitalen virtuellen Modell ein statisches dreidimensionales Modell erzeugt.

## 2.2 Einsatz digitaler Werkzeuge

- 2D-DGS: Zugmodus, Ortslinien, Makros. Punktbasiert. Dynamik!
- 3D-DGS: ebenfalls. Aber **zweigeteilter** Zugmodus. Das hat Konsequenzen!  
Sehr eingeschränkte boolesche Operationen.
- 3D-CAD: Mächtige und komfortable boolesche Operationen.  
Aber keine Dynamik für Zugmodus und Ortslinien.
- 3D-Druck (STL-Export) sowohl mit 3D-DGS als auch mit 3D-CAD möglich.

### 3 Software-Typen für die Raumgeometrie

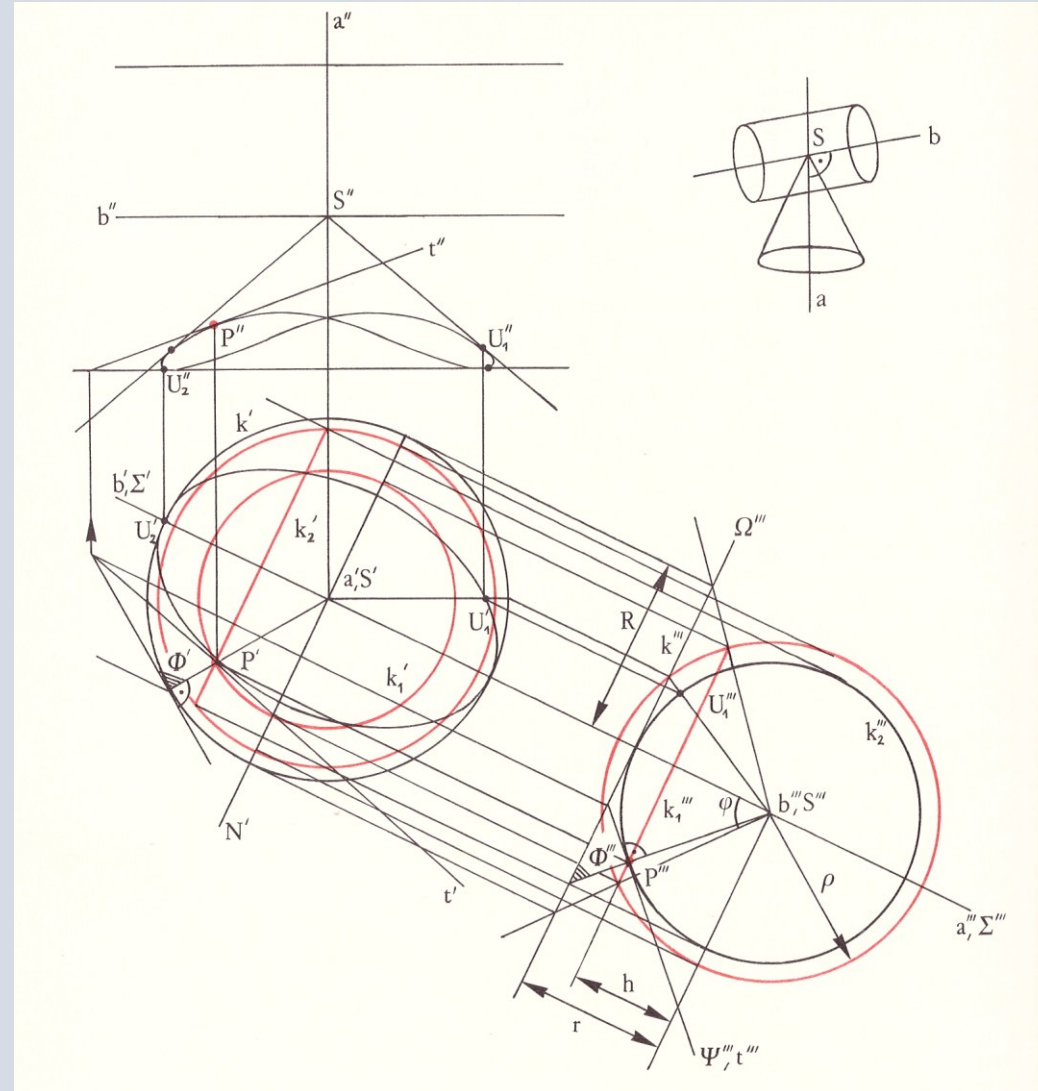
- **3D-DGS** (wie *Cabri-3D* oder *GeoGebra*): Fortentwicklungen von 2D-DGS. Zeichnen und Konstruieren erfolgt in der Ebene. Objekte werden ausgehend von Punkten konstruiert und können durch Ziehen an diesen Punkten dynamisch variiert werden. Mächtige boolesche Operationen sind leider (in GeoGebra) nicht verfügbar.
- **3D-CAD** Varianten von professioneller Software zum technischen Zeichnen (wie *Tinkercad*, *Fusion 360*, *OnShape*). Mehr didaktisch: *GAM*. Objekte werden ausgehend von einem Katalog von Grundkörpern konstruiert. Bearbeitung durch Schnitte mit Ebenen und boolesche Operationen wie Vereinigung und Durchschnitt mit weiteren Objekten. Schnelle Ergebnisse, aber nur statische Modelle.



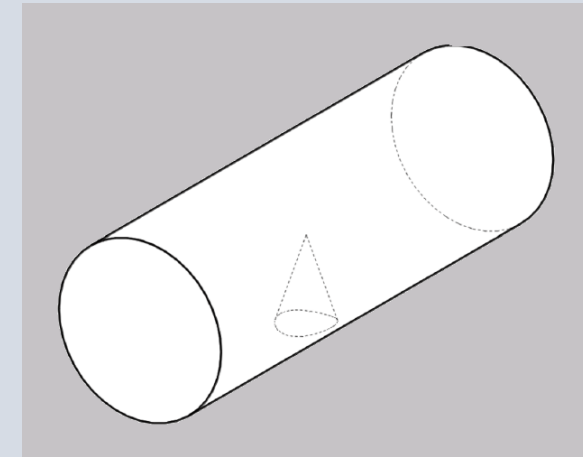
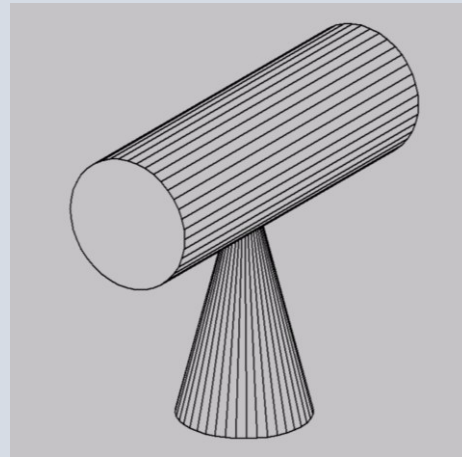
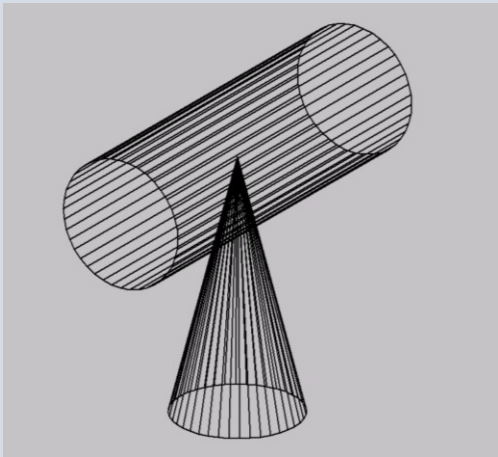
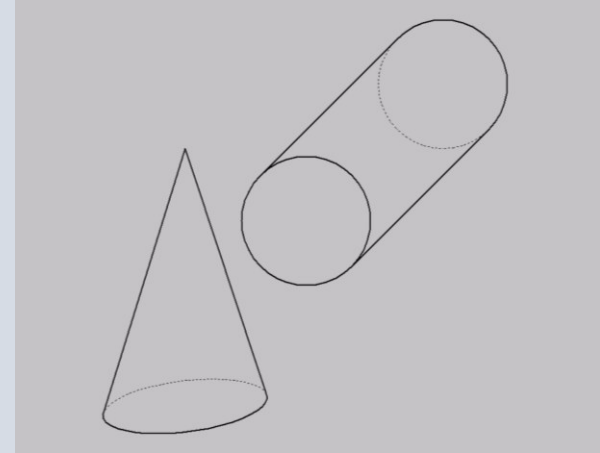
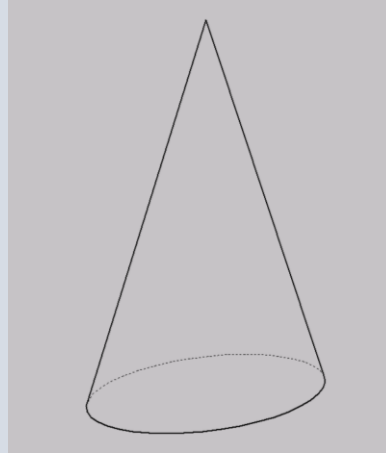
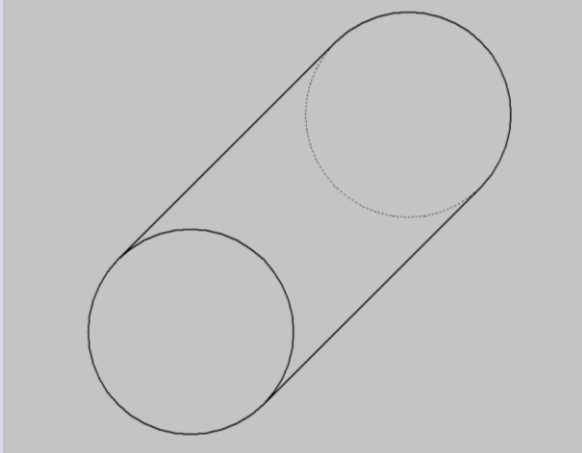
# 4.1 Durchdringung von Zylinder und Kegel, traditionell

## Darstellende Geometrie

(Stärk 1978, S. 144)



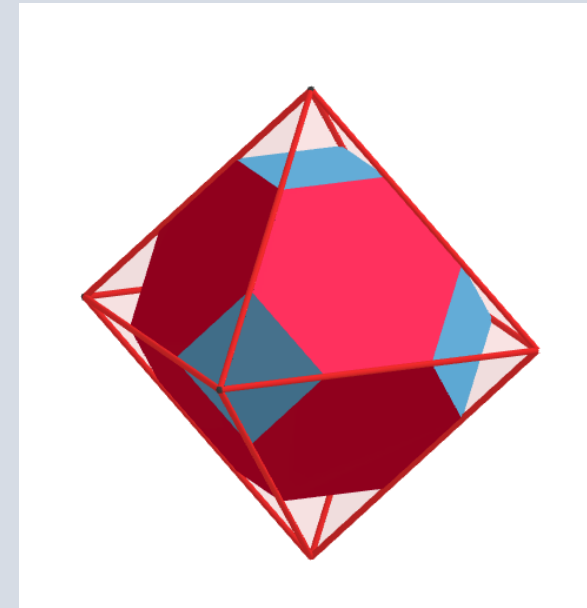
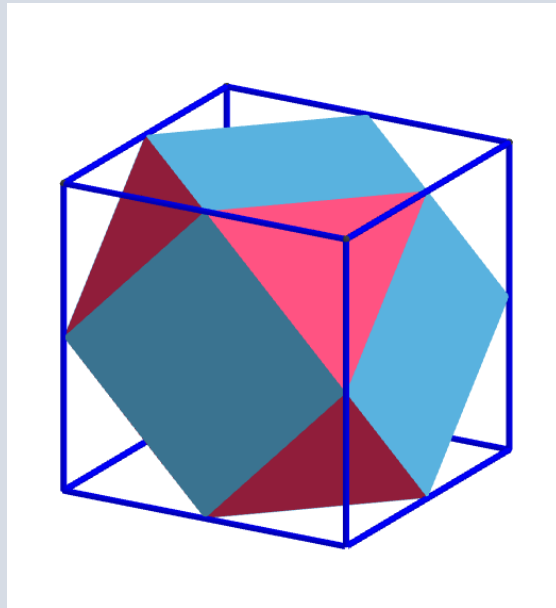
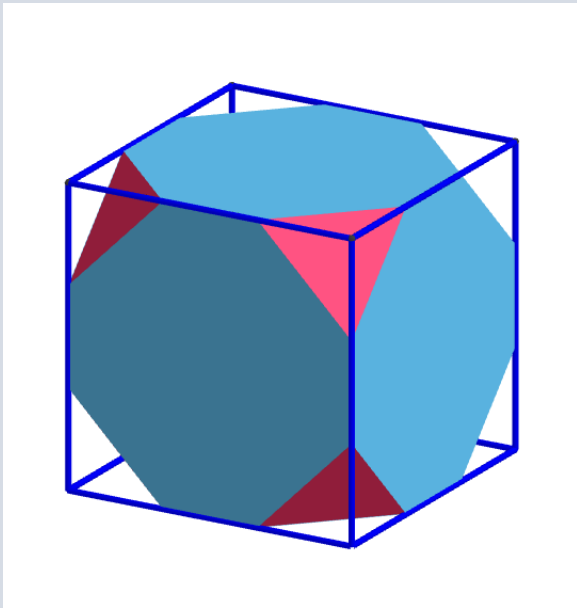
## 4.2 Durchdringung von Zylinder und Kegel, digital



Konstruktion mit GAM: R. Sträßer

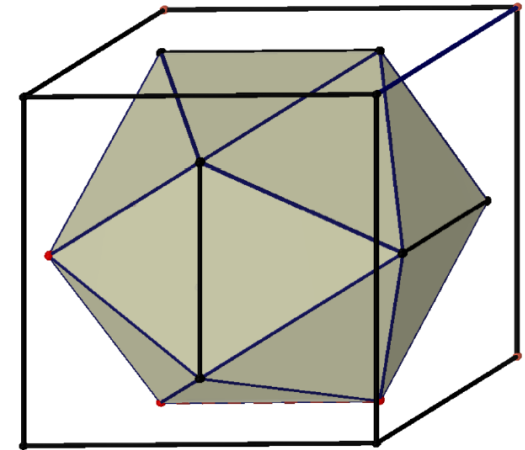
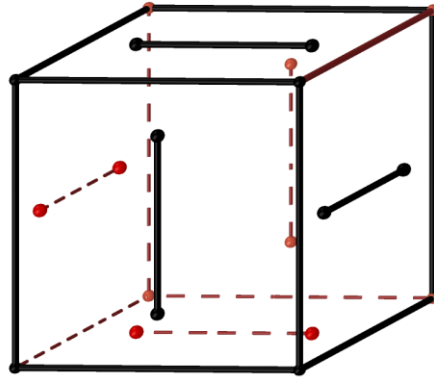
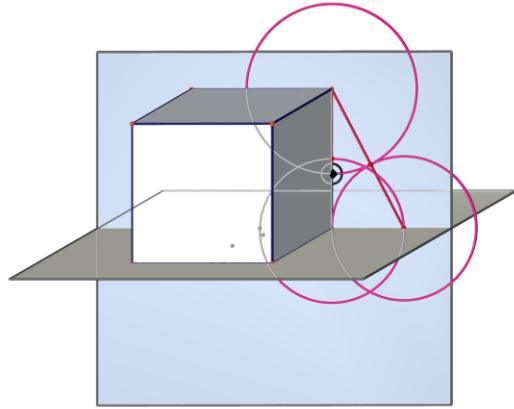
## 4.3 Metamorphose eines Würfels/ Oktaeders

Dynamisch vom Würfel über den Würfelstumpf zum Kuboktaeder. Analog beim Oktaeder.



Konstruktion mit GeoGebra 3D: H.-J. Elschenbroich

## 4.4 Konstruktion eines Ikosaeders aus einem Würfel



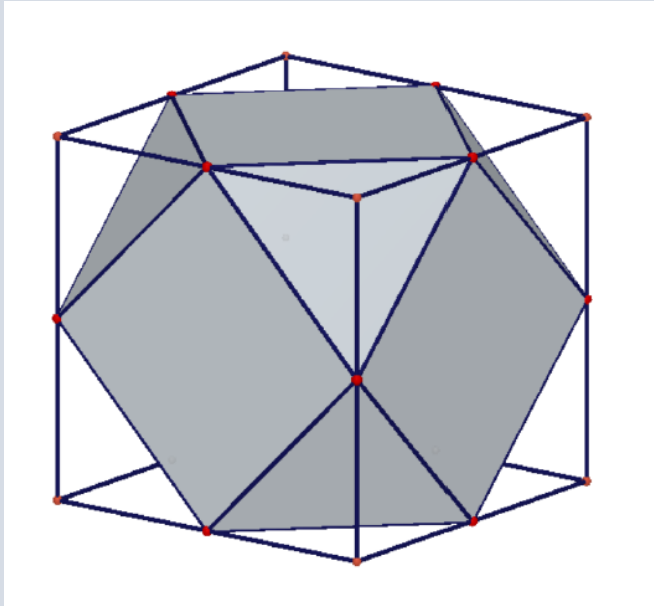
Konstruktion mit Cabri 3D: R. Sträßer

3D Druck: R. Hrach.

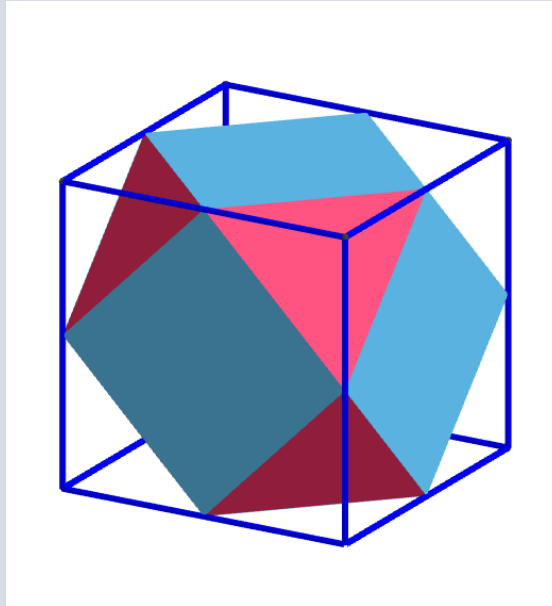
Foto: © Michael Wodak/MedizinFotoKöln



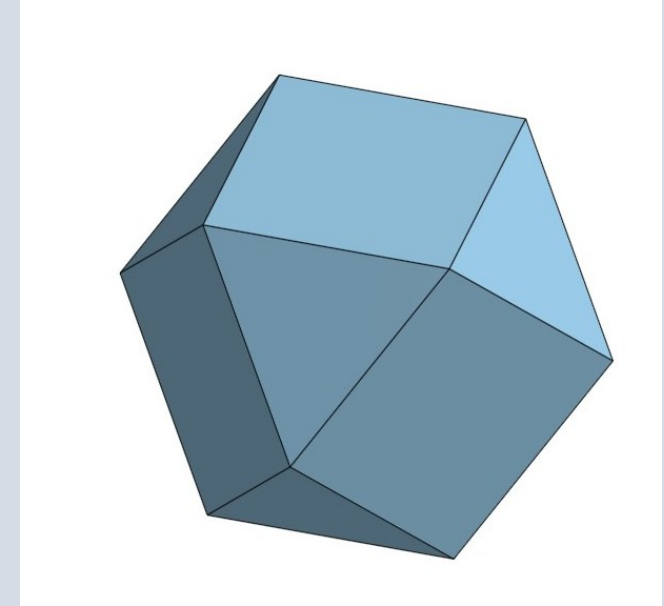
## 4.5 Konstruktionen eines Kuboktaeders aus einem Würfel



Cabri 3D: R. Sträßer.  
Konvexe Hülle!



GeoGebra 3D: H.-J. Elschenbroich.  
Nur als Flächenmodell möglich.



OnShape: P. Lürßen.  
Volumenmodell.

## 4.6 Verschiedene perspektivische Ansichten

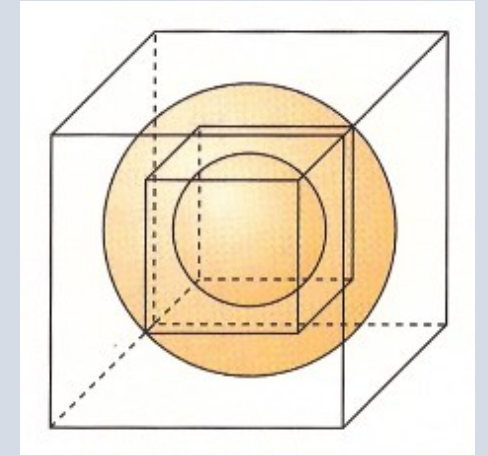
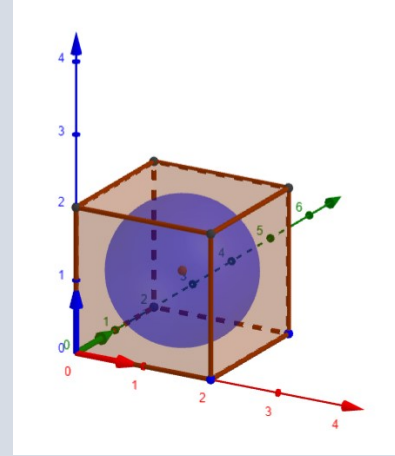
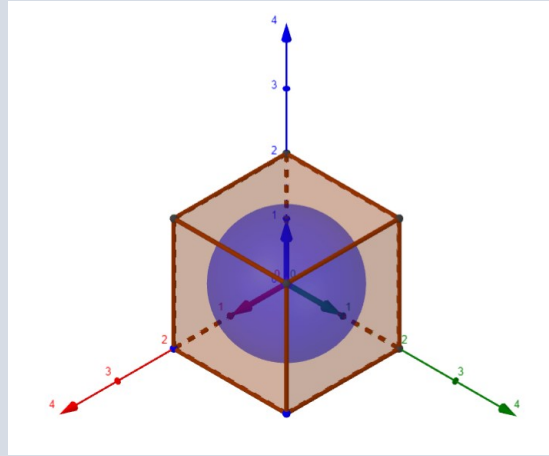
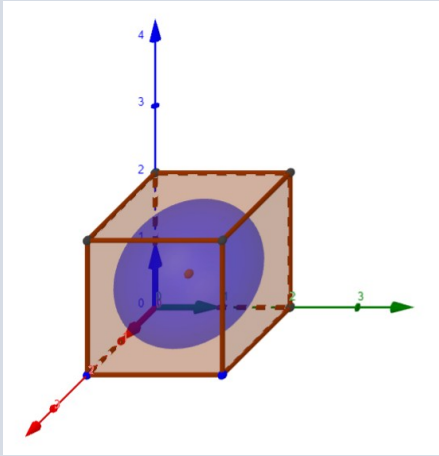
In der Darstellenden Geometrie muss eine Konstruktion wiederholt werden, wenn ein räumliches Objekt mit einer anderen Projektion in einem ebenen Bild dargestellt werden soll.

Bei 3D-DGS und 3D-CAD haben wir ein internes virtuelles Modell, das dann wahlweise in unterschiedlichen Projektionen dargestellt werden kann (auch wenn dies ggf. softwarespezifisch unterschiedlich realisiert wird).

Projektion: Abbildung  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Zentralprojektion, orthogonale Parallelprojektion, schräge Parallelprojektion.

## 4.7 Verschiedene perspektivische Ansichten (mit GeoGebra)



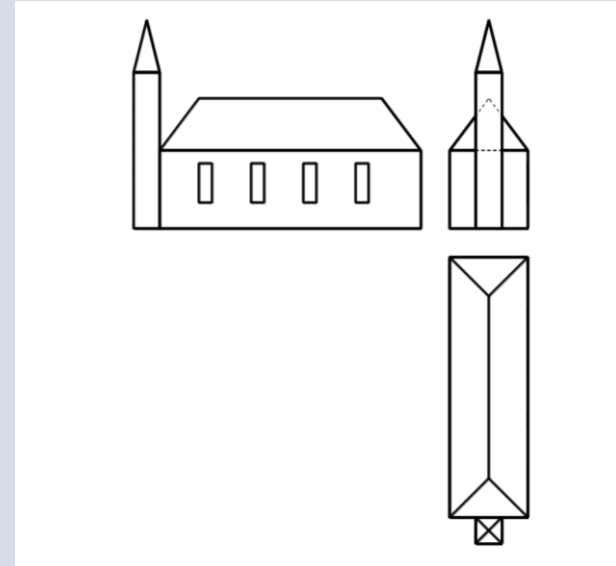
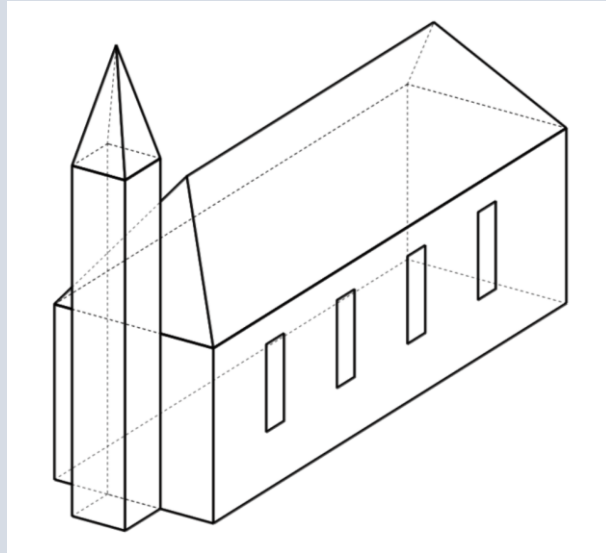
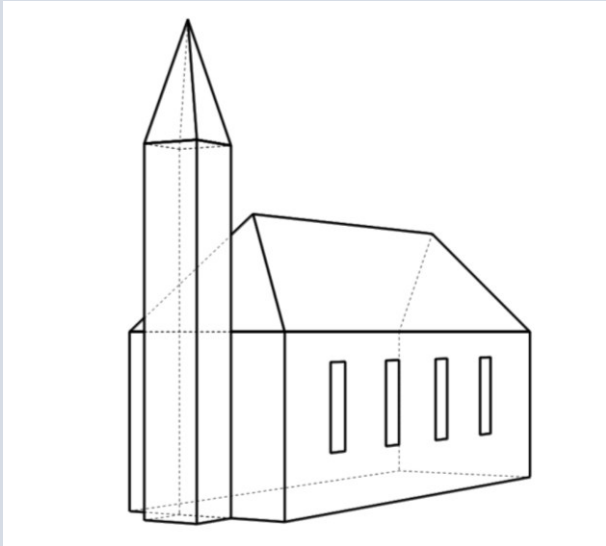
Würfel und Inkugel mit GeoGebra 3D:  
Kavalierprojektion, Isometrie, GeoGebra-Projektion.

Schulbuch-Grafik.  
Projektion?

Konstruktion mit GeoGebra 3D: H.-J. Elschenbroich

Dank an Hans Walser!

## 4.8 Verschiedene perspektivische Ansichten mit GAM



Kirche in Zentralprojektion, Isometrie, Dreitafel-Ansicht.

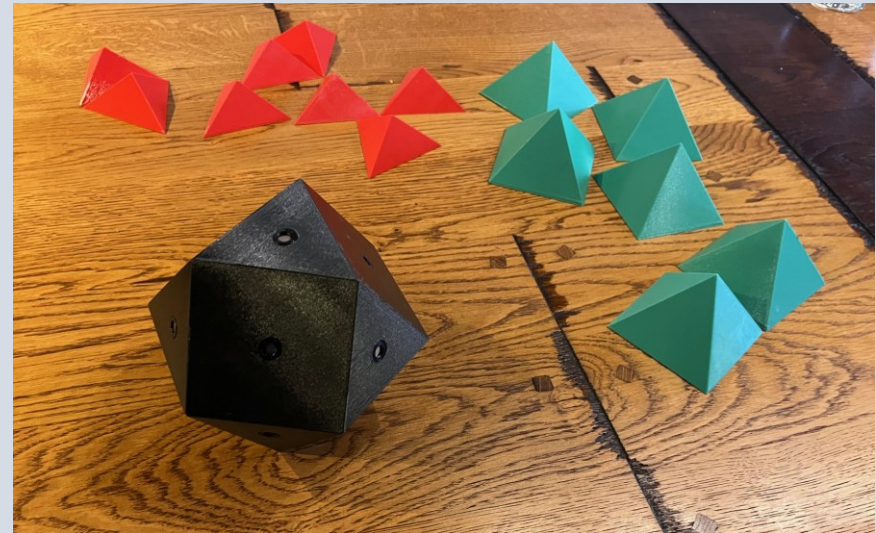
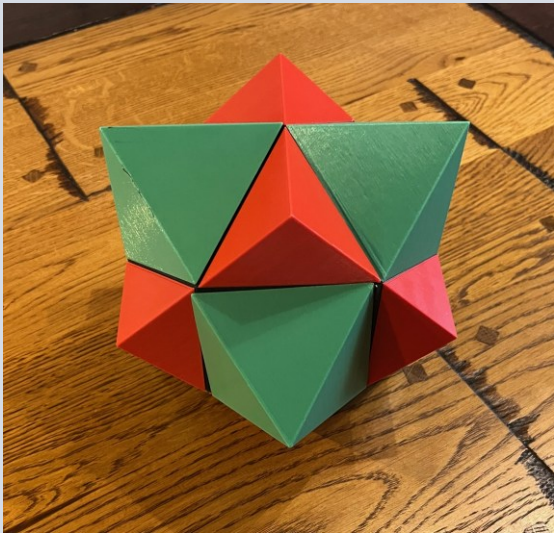
Konstruktion mit GAM nach CAD-Art : R. Sträßer



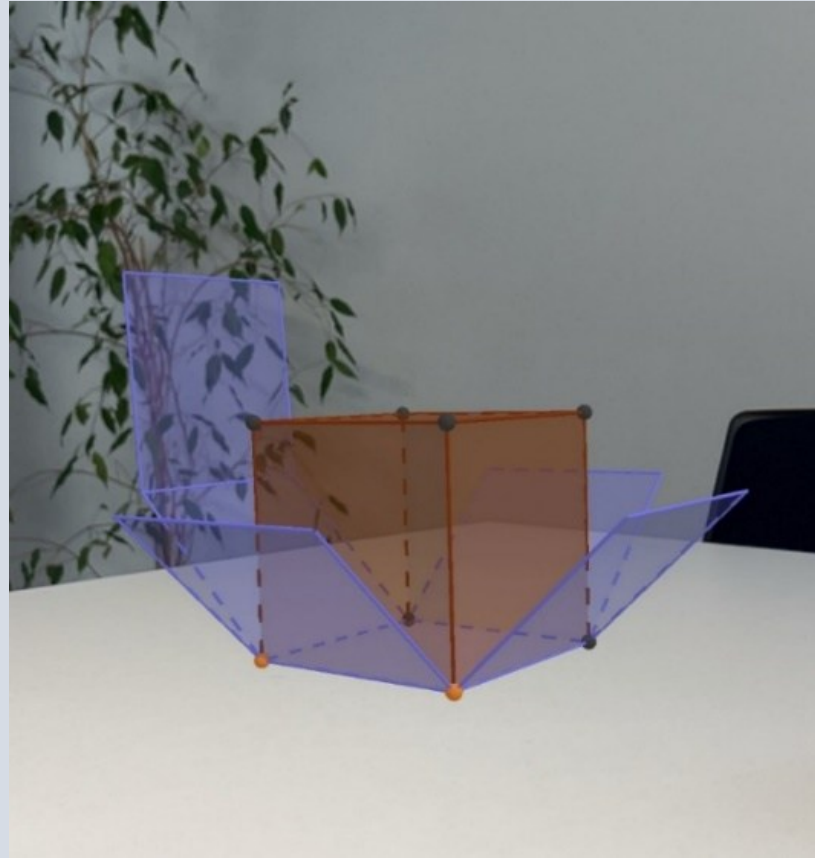
## 4.9 Modelle mit 3D Druck

Alle gängigen 3D-DGS und 3D-CAD haben die Möglichkeit das interne virtuelle Modell in eine **STL**-Datei zu exportieren und ein Modell mit einem 3D-Drucker zu produzieren.

Damit kann man aus dem Unterricht eigene mathematische Modelle produzieren!



## 5 Ausblick



Augmented Reality: Virtueller Würfel mit Netz im realen Klassenraum. GeoGebra Team

## 5 Ausblick

Einsatz von 3D-CAD und 3D-DGS:

Chance zur **Wiederbelebung**, zur Re-Geometrisierung **der Raumgeometrie** auch in den allgemeinbildenden Schulen.

**Dies wird nur mit Software-Nutzung gelingen.**

Entwicklung der Eingabemedien: Datenhandschuh, VR-Brille, ...

**Neue Chancen:**

- (1) Verbindung von Zeichnung und Modell in der Raumgeometrie-Software.
- (2) Einfache Herstellung von Modellen durch 3D-Druck, auch für Nicht-Profis
- (3) Absehbar: Verbindung von analoger und virtueller Welt, AR und VR.

*Danke für Ihre  
Aufmerksamkeit !*

## **Kontakt**

Hans-Jürgen Elschenbroich: [elschenbroich@t-online.de](mailto:elschenbroich@t-online.de)

Rudolf Sträßer: [rstraess@uni-muenster.de](mailto:rstraess@uni-muenster.de)

# Literatur

Bender, R., Hattermann, M., & Sträßer, R. (2021). Konstruieren im Raum – plötzlich alles anders? *mathematik lehren*, 228, 14-18.

**Elschenbroich, H.-J., & Sträßer, R. (2024). Einleitung.**  
*Der Mathematikunterricht*, 70(2), 2.

**Elschenbroich, H.-J., & Sträßer, R. (2024a). RAUM-Geometrie mit digitalen Werkzeugen.**  
*Der Mathematikunterricht*, 70(2), 3-15.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 2).  
Stuttgart: Ernst Klett.

Hattermann, M., Kadunz, G., Rezat, S., & Sträßer, R. (2015/2023). Geometrie: Raum und Form. In Bruder, R. u.a. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 185-219, 2. Aufl. 201-242). Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

Mick, S. u.a. (o. J.). Arbeitsunterlagen zu einem kompetenzorientierten Unterricht aus Geometrischem Zeichnen. URL: [https://raumgeometrie.schule.at/fileadmin/DAM/Gegenstandsportale/Raumgeometrie/Dateien/wg/Handreichung\\_GZ\\_Kompetenzen\\_2013\\_06\\_18.pdf](https://raumgeometrie.schule.at/fileadmin/DAM/Gegenstandsportale/Raumgeometrie/Dateien/wg/Handreichung_GZ_Kompetenzen_2013_06_18.pdf)

