Analisis Sensitivitas

Berikut akan diperkenalkan makna sensitivitas lewat contoh soal yang dapat diselesaikan lewat grafik.

Meskipun program linear dianggap sebagai model yang deterministik (koefisien-koefisien dianggap sudah pasti, konstan, sehingga nilai-nilai perubah dapat diperkirakan dengan kepastian tinggi, lawannya ialah probabilistik), tetapi dalam praktek selalu saja ada perubahan nilai, entah itu koefisien ongkos atau suku tetap diruas kanan dalam suatu masalah yang dibicarakan.

Perubahan ini terjadi karena dari hari ke hari harga barang di pasar dapat bergoyang atau mengalami perubahan naik atau turun. Ini semua dapat mempengaruhi perencanaan pembelanjaan yang sudah disusun, baik secara perorangan, maupun organisasi, misalnya rumah makan, restoran, hotel, perkantoran, dan sebagainya.

Untuk mengatasi kesulitan yang terjadi tersebut, dalam menggunakan model program linear muncul pertanyaan-pertanyaan sebagai berikut: apakah akibat bagi PO dan nilai program bila kemudian koefisien ongkos berubah sedikit, atau suku tetap yang berubah, atau koefisien teknisnya yang berubah? Dapat pula pertanyaan dibalik sebagai berikut, berapa besar koefisien-koefisien tertentu tersebut boleh bergoyang tanpa mengubah PO?

Timbullah istilah analisis sensitivitas atau analisis kepekaan, yang akan kita pelajari berikut ini. Kita pelajari langsung melalui contoh ya, untuk teorinya nanti akan kita pelajari setelah kita tuntas mempelajari PL metode simpleks. Mengapa? Karena tujuan akhir mempelajari PL adalah menentukan keoptimalan dan analisis sensitivitasnya.

Contoh 1:

Perhatikan contoh soal berikut:

Sekelompok petani memiliki 6 ha tanah yang ditanami padi, jagung, dan palawija lain. Karena keterbatasan sumberdaya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa yang harus ditanami jagung, sedang untuk palawija lain ternyata tidak menguntungkan.

Dalam satu masa tanam tenaga yang tersedia hanya 1590 jam orang, pupuk juga terbatas, tak lebih dari 480 kg, sedangkan air dan sumberdaya lainnya dianggap cukup tersedia. Diketahui pula bahwa untuk menghasilkan 1 kuintal padi diperlukan 12 jam orang tenaga dan 4 kg pupuk, dan untuk 1 kuintal jagung diperlukan 9 jam orang dan 2 kg pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kuintal padi per ha atau 20 kuintal jagung per ha. Pendapatan petani dari 1 kuintal padi adalah Rp. 32.000 sedang dari 1 kuintal jagung Rp. 20.000, dan dianggap bahwa semua hasil tanamnya selalu habis terjual. Masalah bagi petani ialah bagaimanakah rencana (program) produksi yang memaksimumkan pendapatan total? Artinya, berapa ha tanah ditanami padi dan berapa yang ditanami jagung.

Perumusan masalah atau pemodelan matematika masalah tersebut adalah,

Mencari x dan y yang memenuhi

$$x \geq 0 \qquad (1)$$

$$y \geq 0 \qquad (2)$$

$$2x + 5y \leq 600 \qquad (3)$$

$$4x + 3y \leq 530 \qquad (4)$$

$$2x + y \leq 240 \qquad (5)$$

dan memaksimumkan $f(x, y) = 32x + 20y$.

Penyelesaian:

Koefisien ongkos 32 berasal dari Rp. 32.000 ialah pendapatan petani dari 1 kuintal padi yang ia produksi. Diperoleh PO $(x, y) = (95,50)$ dan nilai maksimum fungsi atau nilai program 4040 (Cek!).

Kini dipertanyakan, bila koefisien ongkos 32 ini berubah, yang mana daerah nilainya supaya PO yang telah diperoleh tidak berubah (jadi tidak perlu menyusun perancangan yang baru), meskipun mungkin nilai program berubah?

Untuk menjawabnya, fungsi sasaran $f(x, y) = 32x + 20y$ diubah menjadi $f = px + 20y$, yaitu pendapatan petani dari 1 kuintal padi adalah p ribu rupiah, nilai p berubah-ubah.

Karena koefisien yang lain dianggap tak berubah maka daerah layakpun tidak berubah (lihat Gambar 1). Yang terpengaruh oleh perubahan adalah gradien garis senilai. Namakan gradien tersebut m, maka $m = -\frac{p}{20}$.

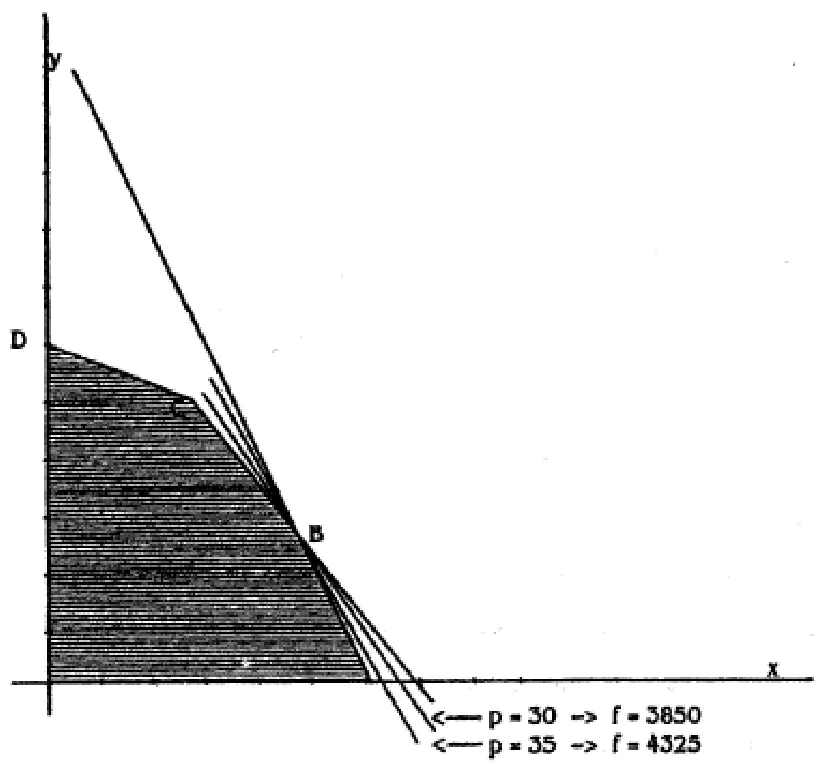
Dalam soal semula dengan $p = 32$ maka $m = -\frac{32}{20} = -\frac{8}{5}$. Nilai ini terapit oleh gradien batas kendala (5), $m_5 = -2$, dan gradien batas kendala (4), $m_4 = -\frac{4}{3}$, jadi

$$m_5 = -2 < -\frac{8}{5} < -\frac{4}{3} = m_4.$$

Supaya PO tidak berubah maka syarat inipun harus tetap dipenuhi oleh yang baru, jadi

$$-2 \leq -\frac{p}{20} \leq -\frac{4}{3}$$

(Untuk kejadian batasnya, $m = -2$ atau $m = -\frac{4}{3}$ akan timbul pilihan penyelesaian tetapi titik B tetap menjadi salah satu PO nya).



Gambar 1

Dari pertidaksamaan tersebut diturunkan bahwa p harus memenuhi

$$26\frac{2}{3} \leq p \leq 40$$

dan dengan demikian titik B tetap menjadi titik optimum, $(x, y) = (95{,}50)$, tetapi nilai program akan menjadi

$$f = 95p + 1000.$$

(Beberapa gambar f_{maks} ini terlukis dalam Gambar 1).

Ini berarti bahwa pendapatan petani dari 1 kuintal padi boleh bergoyang asal masih dalam batas dari $26\frac{2}{3}$ ribu sampai dengan 40 ribu rupiah.

Contoh 2:

Suatu soal berbunyi tentukan x dan y yang memaksimumkan $f(x, y) = 10x + 20y$ dan memenuhi kendala:

$x \geq 0$ (1)

$y \geq 0$ (2)

$x + y \leq 8$ (3)

$3x - y \geq 0$ (4)

$x \geq q.$ (5)

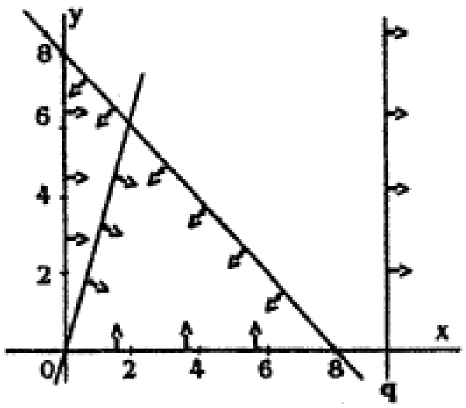
Berapa sajakah nilai q supaya soal di atas mempunyai PO dan berapa nilai program yang sesuai?

Jawab:

Kendala (1), (2), (3), dan (4) menghasilkan daerah layak (sementara) ialah daerah segitiga OAB (kendala (1) berlebih), dengan $A(8{,}0)$ dan $B(2{,}6)$. Kemudian ditambahkan kendala (5) $x \geq q$. Dengan q diubah-ubah, arah batasnya, tidak berubah melainkan letaknya saja, tetapi ini akan mengubah daerah layaknya.

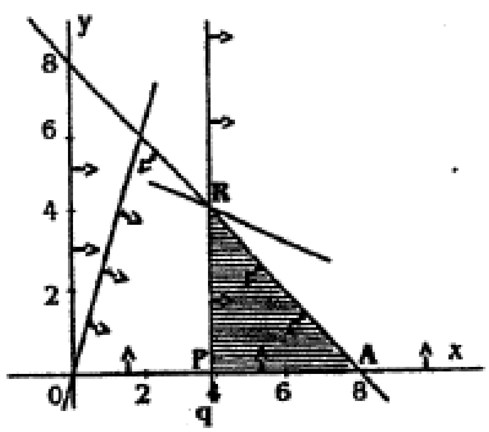
Jika q diberikan berbagai nilai dari yang besar ke yang kecil akan diperoleh empat kejadian sebagai berikut.

a. Untuk $q > 8$ (Gambar a) daerah layaknya kosong sehingga soal tidak layak dan tidak ada PO.



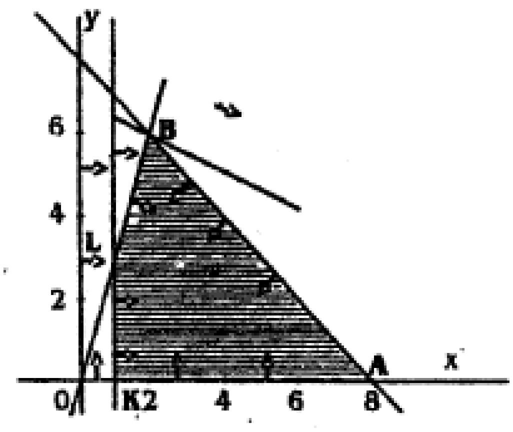
Gambar a

b. Untuk $2 < q \leq 8$ (Gambar b) daerah layaknya berupa daerah segitiga PAR (untuk $q = 8$ segitiga menjadi satu titik ialah A) dengan titik optimumnya ialah $R(q, 8 - q)$ dan nilai program $f_{maks} = 160 - 10q$.



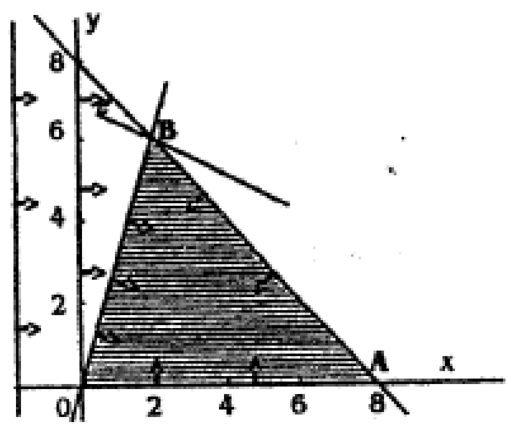
Gambar b

c. Untuk $0 < q \leq 2$ (Gambar c) daerah layak berupa daerah segiempat KABL tetapi titik optimum tetap di $B(2,6)$, dengan nilai 140.



Gambar c

d. Akhirnya bila $q \leq 0$ kendala (5) ini menjadi berlebih, daerah layaknya adalah daerah segitiga OAB dengan titik optimum tetap di $B(2,6)$ dan nilai program 140. (Gambar d).



Gambar d

Latihan: Tugas Kelompok Ketiga

1. Diberikan soal:

   Mencari x_1 dan x_2 tak negatif yang memenuhi

   $4x_1 - x_2 \geq 0$

   $x_1 - 2x_2 \leq 0$

   $x_1 + 3x_2 \geq 6$

dan meminimumkan $f = px_1 + 3x_2$.

a. Selesaikan soal di atas untuk $p = -1$.

b. Berapa nilai p supaya PO nya tidak berbeda dari PO pada butir a?

2. Harus ditentukan x dan y yang tak negatif yang memenuhi

$x - y \leq 0$

$x \leq 4$

$x + y \leq Q$

dan meminimumkan $f = 25 - x - 2y$.

Berapakah nilai Q supaya f_{min} masih positif?

3. Harus ditentukan u dan v tak negatif yang memenuhi:

$-2u + 2v \leq 7$

$au - v \leq 0$

$u - 2v \leq 2$

dan memaksimumkan $f = 3u + 2v$.

Berapakah nilai a supaya soal masih mempunyai PO?

Note: Soal no 1 – 3, grafiknya dibuat manual.

4. Gambarkan grafik masalah PL soal Tugas Kelompok Kedua dengan Geogebra. Untuk setiap nomor soal tuliskan langkah-langkah pembentukan grafiknya dan beri analisa grafik yang dihasilkannya.