11.5 Ejercicios

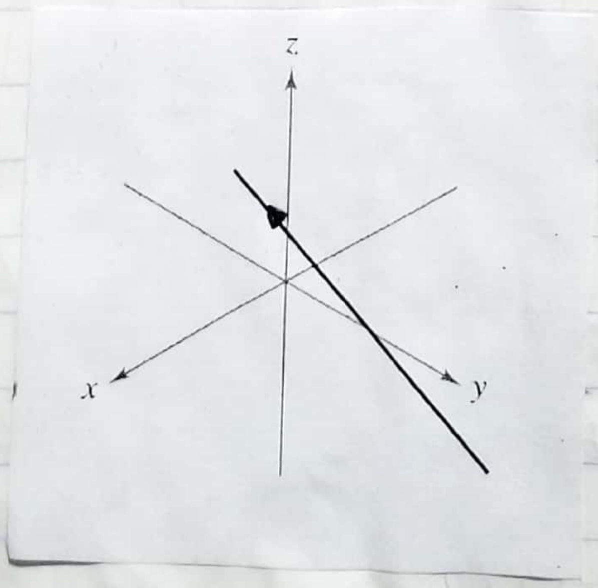
① La figura muestra la gráfica de una recta dada por las ecuaciones paramétricas.

a) Dibujar una flecha sobre la recta para indicar su dirección.

b) Hallar las coordenadas de dos puntos, P y Q en la recta. Determinar el vector $\vec{PQ}$. ¿Cuál es la relación entre las componentes del vector y los coeficientes de t en las ecuaciones paramétricas? ¿Cuál es la razón de esta relación?

c) Determinar las coordenadas de todos los puntos de intersección con los planos coordenados. Si la recta no corta a uno de los planos coordenados, explicar por qué.

a)



b) Cuando $t=0$, entonces
$P=(1,2,2)+0(3,-1,5)=(1,2,2)$.

Cuando $t=3$, entonces
$Q=(1,2,2)+3(3,-1,5)=(1,2,2)+(9,-3,15)$
$=(10,-1,17)$

Siendo $P(1,2,2)$ y $Q(10,-1,17)$.

$\vec{PQ} = \langle 9,-3,15$.

Los componentes de el vector y los coeficientes de t son proporcional porque la linea es paralela a $\vec{PQ}$

c) $y=0$ cuando $t=2$, Entonces $x=7$; $z=12$.

Punto $(7,0,12)$.

- $x=0$, cuando $t=1/3$, entonces $y=\frac{7}{3}$, $z=1/3$
Punto $(0, 7/3, 1/3)$
- $z=0$ cuando $t=2/3$, entonces $x=1/5$, $y=13/5$
Punto $(-1/5, 13/5, 0)$

• Hallar conjuntos de:
a) Ecuaciones paramétricas
b) Ecuaciones simétricas de la recta por el punto paralelo al vector o recta dado (si es posible) (Para cada recta, escribir los números de dirección como enteros).

(7) Punto $(-2,0,3)$ — Paralela a: $V = 2i + 4j - 2k$.

• vector director: $V = \langle 2, 4, -2 \rangle$
• Números directores: 2, 4, -2.

a) Paramétrica

$x = -2 + 2t$

$y = 4t$

$z = 3 - 2t$

b) Ecu. simétrica

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{-2}$$

(10) $(-3, 5, 4)$ — $$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-3$$

• Números directores: 3, -2, 1.

a) Paramétrica

$x = -3 + 3t$

$y = 5 - 2t$

$z = 4 + t$.

b) Ecua. simétrica

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{2} = z-4$$

- Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta.

(15) La recta pasa por el punto $(2, 3, 4)$ y es paralela al plano xz y al plano yz.

Plano xz: La norma al plano xz es el vector $(0,1,0)$

Plano yz: La norma al plano xz es el vector $(1,0,0)$.

Dirección de la recta $= (0,1,0) \times (1,0,0) = (0,0,1)$.

$x(t) = x_0 + at = 2 + 0t = 2$

$y(t) = y_0 + bt = 3 + 0t = 3$

$z(t) = z_0 + ct = 4 + 1t = 4 + t$

(17) La recta pasa por el punto $(2,3,4)$ y es perpendicular al plano dado $3x + 2y - z = 6$.

- Vector Director $v = 3i + 2j - k$.

  $\vec{n} = \langle 3, 2, -1 \rangle$
- Números directores $3, 2, -1$.
- $x(t) = 2 + 3t$
- $y(t) = 3 + 2t$
- $z(t) = 4 - t$

$\left.\begin{array}{l} x(t) = 2 + 3t \\ y(t) = 3 + 2t \\ z(t) = 4 - t \end{array}\right\}$ Paramétrica

(19) La recta pasa por el punto $(5, -3, -4)$ y es paralela a $v = \langle 2, -1, 3 \rangle$.

- $x = 5 + 2t$
- $y = -3 - t$
- $z = -4 + 3t$

(21) La recta pasa por el punto $(2, 1, 2)$ y es paralela a la recta $x = -t$, $y = 1 + t$, $z = -2 + t$.

- $x = 2 - t$
- $y = 1 + t$
- $z = 2 + t$.

(39) Determinar si el plano pasa por cada punto.

$x + 2y - 4z - 1 = 0$

a) $(-7, 2, -1)$ b) $(5, 2, 2)$.

a) $(-7, 2, -1) : (-7) + 2(2) - 4(-1) - 1 = 0$

$-7 + 4 + 4 - 1 = 0$

$-7 + 8 - 1 = 0$

$0 = 0$ ✓

$\therefore$ El Plano Pasa Por $(5, 2, 2)$.

b) $(5, 2, 2) : (5) + 2(2) - 4(2) - 1 = 0$

$5 + 4 - 8 - 1 = 0$

$9 - 9 = 0$

$0 = 0$ ✓

(43) Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto y es perpendicular al vector o recta dado.

Punto

$(3,2,2)$

Perpendicular.

$n = 2i + 3j - k$.

- Vector normal: $(3,2,2)$
- Ecuación del plano $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$2(x-3)+3(y-2)-1(z-2)=0$$
$$2x-6+3y-6-z+2=0$$
$$2x+3y-z-10=0$$
$$2x+3y-z=10$$

(47) Hallar una ecuación del plano.
El plano que pasa por: $A(0,0,0)$, $B(2,0,3)$ y $C(-3,-1,5)$.

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$$
$$\vec{AB} = \langle 2-0, 0-0, 3-0 \rangle = \langle 2, 0, 3 \rangle$$
$$\vec{AC} = \langle -3-0, -1-0, 5-0 \rangle = \langle -3, -1, 5 \rangle$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} k$$
$$= (0-(-3))i - (10-(-9))j + (-2-0)k$$
$$= 3i - 19j + 2k.$$

vector normal:

$$\vec{n} = (3, -19, -2).$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$3(x-0)-19(y-0)-2(z-0)=0$$

$$\boxed{3x-19y-2z=0}.$$

(51) El plano que pasa por el punto (1,2,3) y es paralelo al plano yz.

(1,2,3).

vector Normal $v=i$, $(x-1)=0$ $x=1$.

(53) El plano contiene las rectas dada por

$$\frac{x-1}{-2} = y-4 = z \quad y \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}.$$

El vector director de la linear son:

$v = -3i+4j-k = \langle -3, 4, -1 \rangle$

$u = -2i+j+k = \langle -2, 1, 1 \rangle.$

Vector normal $v \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} k$

$= (-1-4)i - (2-(-3))j + (-8-(-3))k$

$= -5i - 5j + 5k$

$= -5(i+j+k).$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
Ecuación del plano

Puntos de intersección de la línea.
$(-1,5,1)$

$(x+1)+(y-5)+(z-1)=0$
$\boxed{x+y+z=5}$

(55) El plano pasa por los puntos $(2,2,1)$ y $(-1,1,-1)$ y es perpendicular al plano $2x-3y+z=3$.

Sea v el vector de $(-1,1,-1)$ hasta $(2,2,1)$: $v = 3i + j + 2k$.

Sea n el vector normal de el plano $2x-3y+z=3$: $n = 2i-3j+k$.

porque v y n se encuentran en el plano P, el vector normal de P is.

$$v \times n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 7i - j - 11k$$

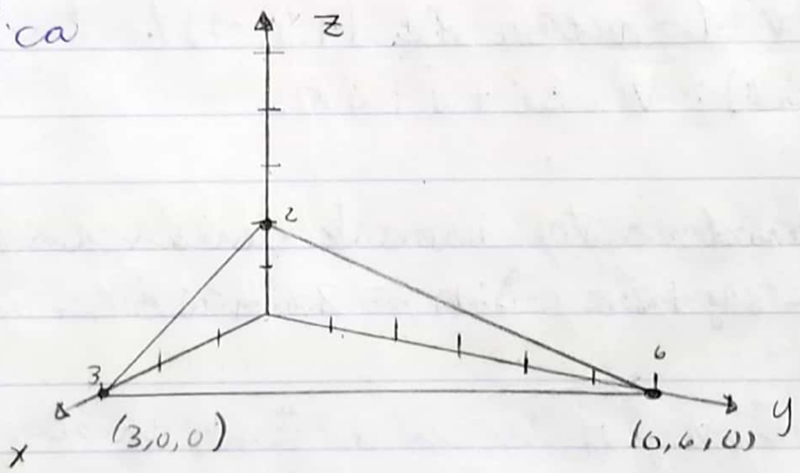
$7(x-2)+1(y-2)-11(z-1)=0$
$\boxed{7x+y-11z=5}$

(71) Marcar toda intersección y dibujar la gráfica del plano.

- $4x+2y+6z=12$.

Int x =	Int x	Int z
$y=0 \wedge z=0$	$x=0 \wedge z=0$	$x=0 \wedge y=0$
$\frac{4x}{4}=\frac{12}{4}$	$\frac{2y}{2}=\frac{12}{2}$	$\frac{6z}{6}=\frac{12}{6}$
$x=3$	$y=6$	$z=2$
$(3,0,0)$	$(0,6,0)$	$(0,0,2)$.

Gráfica



(93) Hallar el o los puntos de intersección del plano y la recta. Ver si la recta se halla en el plano.

- $2x-2y+z=12$, $x-\frac{1}{2} = \frac{y+(3/2)}{-1} = \frac{z+1}{2}$

Escribiendo la ecuación en el plano de forma paramétrica y sustituyendo en la ecuación del plano tenemos:

$x = \frac{1}{2} + t$. $\quad 2\left(\frac{1}{2}+t\right) - 2\left(\frac{-3}{2}-t\right) + \left(-1+2t\right) = 12$.

$y = -3/2 - t$ $\quad t = 3/2$.

$z = -1+2t$.

Sustituyendo $t = 3/2$ en la ecuación paramétrica para la línea tenemos un punto en la intersección $(2, -3, 2)$

$\therefore$ La línea no está en el plano.

(99) ~~Hallar la distancia~~ del punto al plano.
$P(2,8,4)$, $2x+y+z=5$

Punto en el plano: $Q\langle 0,0,5\rangle$
Plano Normal: $n\langle 2,1,1\rangle$.
Plano: $2x+y+z=5$

vector $\vec{PQ} = \langle 2,8,-1\rangle$

$$D = \frac{|\vec{PQ}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\langle 2,8,-1\rangle\cdot\langle 2,1,1\rangle|}{\sqrt{4+1+1}}$$

$$= \frac{|4+8-1|}{\sqrt{6}} = \frac{11}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{11\sqrt{6}}{6}}$$

(101) Verificar que los planos son paralelos y hallar la distancia entre ellos.

- $x-3y+4z=10 \rightarrow n_1\langle 1,-3,4\rangle$
  $x-3y+4z=6. \rightarrow n_2\langle 1,-3,4\rangle$ $\Big\}$ ∴ Son // Paralelas.

Entonces $n_1=n_2$. los planos son //. Elegir un punto en cada plano.

$P(-5,0,3)$ es un punto en $4x-4y+9z=7$
$Q(0,0,2)$ " " $4x-4y+9z=18$

$\overrightarrow{PQ} = \langle -4, 0, 4 \rangle$

$$D = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\langle 4, 0, 0 \rangle \cdot \langle 1, -3, 4 \rangle|}{\sqrt{1+9+16}}$$

$$= \frac{|4+0+0|}{\sqrt{26}} = \frac{4}{\sqrt{26}} = \boxed{\frac{2\sqrt{26}}{13}}$$

(105) Hallar la distancia entre el punto y la recta dada por medio de conjunto de ecuaciones parametricas.

• $(1, 5, -2)$; $x = 4t - 2$, $y = 3$, $z = -t + 1$.

Vector director $u = \langle 4, 0, -1 \rangle$

$Q(1, 5, -2)$ Punto Dado.

$P(-2, 3, 1)$ Punto en la linea

$\overrightarrow{PQ} = \langle 3, 2, -3 \rangle$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} k$$

$$= -2i - 9j - 8k = \langle -2, -9, -8 \rangle$$

$$D = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{4+81+64}}{\sqrt{16+0+1}} = \frac{\sqrt{149}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{2533}}{17}$$