8 TRIÂNGULOS

8.1 PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

Definição: O encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é único e chama-se **circuncentro**.

Propriedades:

1) O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

2) O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida do terceiro lado. (justificar)

Observação: O circuncentro pode ser interno (no triângulo acutângulo) ou externo (no triângulo obtusângulo) ou pertencer a um dos lados, sendo, neste caso o seu ponto médio (no triângulo retângulo).

Definiçôes:

1) Ceviana é todo segmento que tem uma extremidade num vértice qualquer de um triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto a esse vértice.

2) Mediana é toda ceviana que tem uma extremidade no ponto médio de um lado. O ponto de encontro das medianas é único e chama-se **baricentro**.

Propriedade: O baricentro de um triângulo divide cada mediana na razão de 2 para 1, a partir do vértice.

Observação: O baricentro é sempre interno ao triângulo.

Definição: Bissetriz interna é toda ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos adjacentes e congruentes. O ponto de encontro das bissetrizes internas é único e chama-se **incentro**.

Propriedade: O incentro é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

Observação: O incentro é sempre interno ao triângulo.

Definição: Altura é toda ceviana perpendicular a um lado ou ao seu suporte. O ponto de encontro das alturas de um triângulo é único e chama-se **ortocentro**.

Observação: O ortocentro pode ser interno (no triângulo acutângulo) ou externo (no triângulo obtusângulo) ou coincidir com um dos vértices, no caso, o do ângulo reto (no triângulo retângulo).

Definição: O triângulo $H_aH_bH_c$ é denominado triângulo órtico ou pedal.

Propriedades:

1) As alturas de um triângulo acutângulo são as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo órtico.

2) O circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um mesmo triângulo pertencem a uma mesma reta, denominda reta de Euler.

8.2 CONSTRUÇÃO DE TRIÂNGULOS

Construir um triângulo significa determinar a posição dos seus vértices. Devem ser fornecidos sempre 3 elementos, um deles necessariamente linear, isto é, ou um lado ou uma altura ou uma mediana...

Na discussão da quantidade de soluções pode-se analisar a posição na qual o triângulo foi desenhado e o tamanho obtido.

Normas gerais para a construção de triângulos:

1º) Imagina-se o problema já resolvido e faz-se uma figura rascunho onde comparecem, além do contorno do trângulo, todos os elementos dados.

2º) Estuda-se a figura rascunho em busca de propriedades que permitam obter os vértices.

3º) Determinadas as propriedades, passa-se à construção.

Exercícios

1) Construir o triângulo ABC, sendo dados: a=80mm, h_a =25mm e B=45º

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

2) Construir o triângulo ABC, sendo dados: $a=40mm$, $R=30mm$ e $h_a=30mm$

Observação: R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

3) Construir o triângulo ABC, sendo dados: $c=35mm$, $s_b=38mm$ e $B=60^o$

Observação: s_b é a bissetriz interna relativa ao lado b

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

4) Construir triângulo ABC, sendo dados dois lados e o ângulo oposto ao terceiro lado. a=4cm, b=3cm, $\hat{C}$=60°.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

5) Construir o triângulo ABC, retângulo em A, dados um cateto e a sua projeção sobre a hipotenusa. c=3,5cm, n=2cm.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

6) Construir triângulo ABC, dados dois ângulos $\hat{B}$=60° e $\hat{C}$=45°, e o raio da circunferência inscrita. r=1,5cm.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

7) Construir o triângulo ABC, dados dois lados e a altura relativa a um deles. a=3,5cm, c=2,5cm, h_a=2cm.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

8) Construir o triângulo ABC, dados um lado, altura relativa ao mesmo e um ângulo adjacente. a=3cm, h_a=2cm, $\hat{B}$=30°.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

9) Construir o triângulo ABC, dados um lado, um ângulo adjacente e a mediana relativa ao mesmo. a=4cm, $\hat{B}$=45°, m_a=2,5cm

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

10) Construir o triângulo ABC, dados dois lados e a mediana relativa a um deles. a=5cm, c=4cm, m_c=4,5.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

11) Construir o triângulo ABC, dados dois lados e a mediana relativa ao terceiro. a=5cm, c=4cm, m_b=3,5.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

12) Construir o triângulo ABC, uma altura e uma mediana relativas ao mesmo lado e o raio da circunferência circunscrita. h_a=4cm, m_a=4,5cm, R=3,5cm

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

13) Construir o triângulo ABC, os pontos médios dos lados em posição. M_aM_b=3,5cm, M_aM_c=3cm, M_bM_c=2,5.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

14) Construir o triângulo ABC, dados um lado, a soma dos outros dois e a altura relativa a um destes. $a=5cm$, $b+c=10cm$ e $h_b=4,4cm$

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

15) Construir o triângulo ABC, um lado, a soma dos outros dois e o ângulo oposto a um destes. $a+b=9,5cm$, $c=4,5cm$ e $B=60^o$.

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

16) Construir o triângulo ABC, um lado, a diferença dos outros dois e o ângulo oposto ao maior destes. $b=3{,}5cm$, $a-c=1{,}5cm$ e $\hat{A}=75^o$.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

17) Construir o triângulo ABC, um lado, a diferença dos outros dois e o ângulo oposto ao menor destes. $a=6cm$, $b-c=1{,}4cm$ e $C=45^o$.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

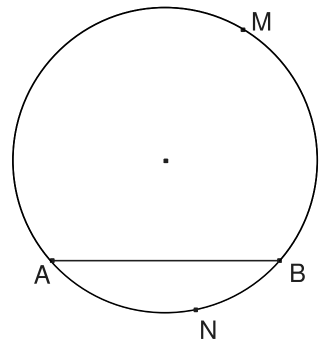
18) Construir o triângulo ABC, dois ângulos e o perímetro. B=75^o, C=45^o e 2p=12cm.

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

9 ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Definição 01: Seja uma circunferência de centro O e raio r. Define-se:

- **Corda** é qualquer segmento que tem as extremidades em dois pontos da circunferência;
- **Diâmetro** é qualquer corda que passa pelo centro de uma circunferência;
- Dois pontos A e B de uma circunferência dividem-na em duas partes, $\overset{\frown}{AMB}$ e $\overset{\frown}{ANB}$. Cada parte denomina-se **arco circular** ou simplesmente arco e os pontos A e B são os extremos.

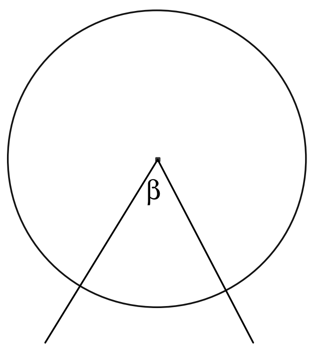


Notação: $\overset{\frown}{AMB}$, $\overset{\frown}{ANB}$, $\overset{\frown}{AB}$ (esta última representação vale somente para o menor arco).

Observação: A corda que une os extremos de um arco subtende o arco.

9.1 ÂNGULO CENTRAL

É todo o ângulo que possui o vértice no centro da circunferência e cada um de seus lados contém um raio da mesma.



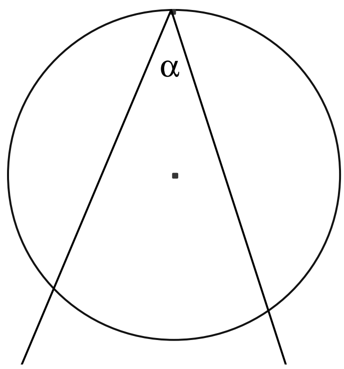
Observações:

1) O arco interceptado por um ângulo central é chamado de correspondente a esse ângulo ou é chamado de arco que o ângulo central enxerga.

2) A medida angular de um arco de circunferência é a medida do ângulo central correspondente.

9.2 ÂNGULO INSCRITO

É todo ângulo convexo que possui seu vértice sobre a circunferência e cada um de seus lados contém uma corda da mesma.

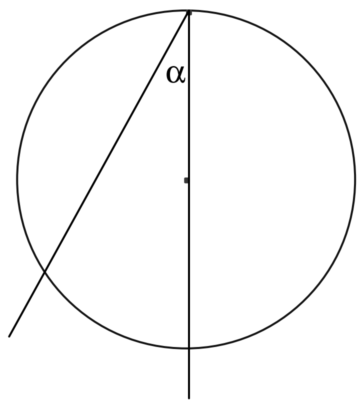


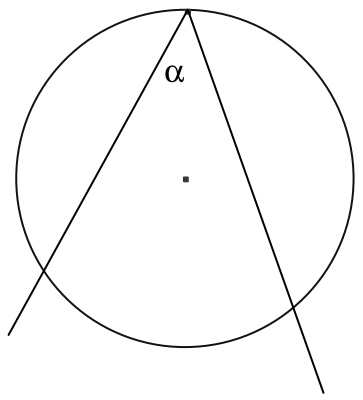
Observações:

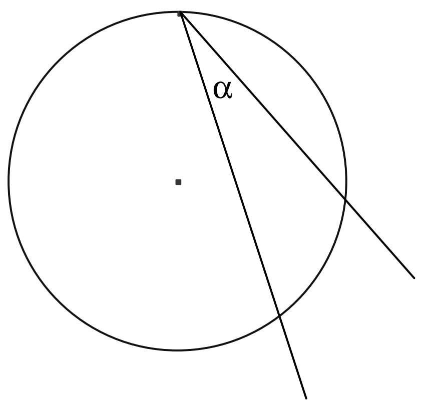
1) O arco interceptado por um ângulo inscrito é correspondente a esse ângulo, ou ele é chamado arco que o ângulo inscrito enxerga.

2) Quando os lados de um ângulo inscrito e de um ângulo central cortam-se sobre os mesmos pontos sobre a mesma circunferência então eles são ditos ângulos correspondentes na circunferência.

Propriedade: Todo ângulo inscrito numa circunferência mede a metade do ângulo central correspondente.

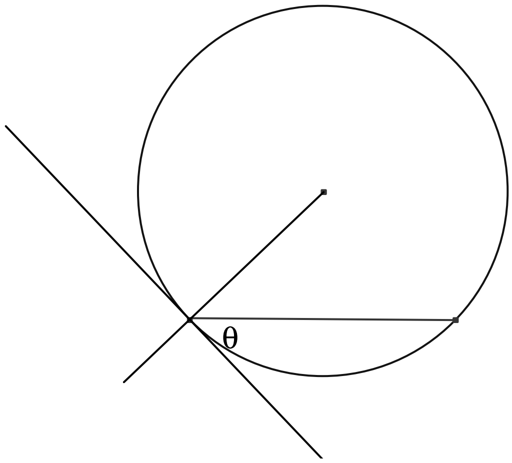

α


α


α

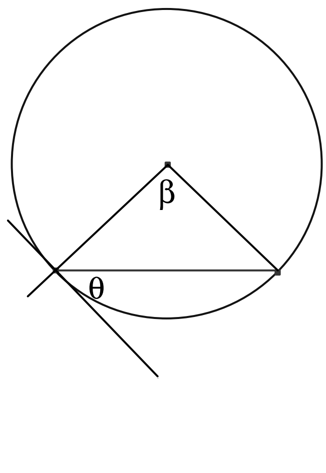
9.3 ÂNGULO DE SEGMENTO

Ângulo de segmento (ou ângulo semi-inscrito) é o ângulo formado por uma corda e a tangente à circunferência conduzida por uma das extremidades da corda.



Observação: O arco interceptado por um ângulo de segmento também é chamado arco correspondente a esse ângulo.

Propriedade: A medida de um ângulo de segmento é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.

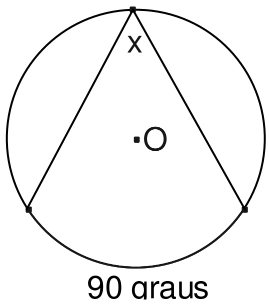


Consequência: Pode-se dizer, então, que o ângulo de segmento, assim como o ângulo inscrito, tem suas medidas iguais à metade do ângulo central correspondente.

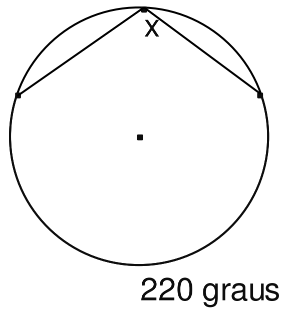
Exercício

1) Calcule o valor de x.

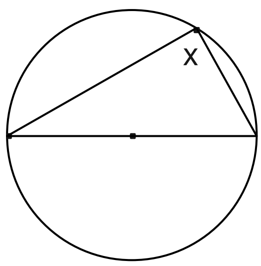
a)



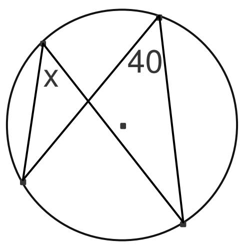
b)



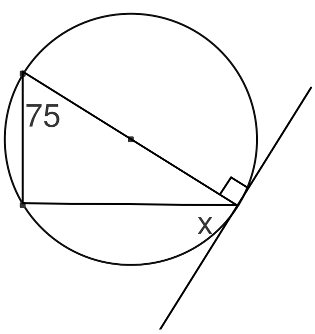
c)



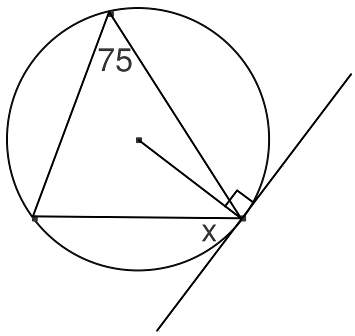
d)



e)



f)



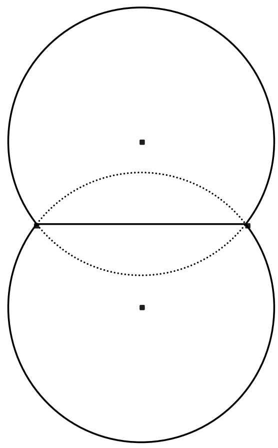
2) O lado BC de um triângulo ABC é congruente ao raio da circunferência circunscrita a esse. Calcule a medida do ângulo A do triângulo e construa-o.

3) Construir triângulo ABC, dados dois ângulos $\hat{B}$=60° e $\hat{C}$=45°, e o raio da circunferência circunscrita. R=3cm.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

10 LG 5 – ARCO CAPAZ

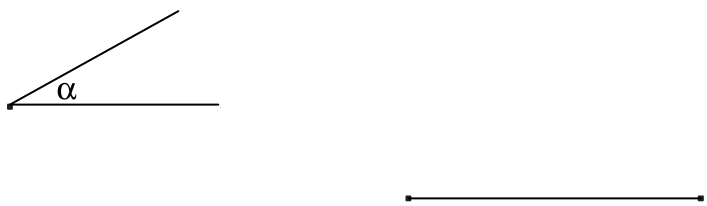
Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano que enxergam um segmento AB segundo um ângulo de medida α constante é o par de arcos capazes do ângulo α descrito sobre $\overline{AB}$.



Exercícios:

1) Construir o par de arcos capazes do segmento AB dado, segundo um ângulo dado α.

a)



Procedimento:

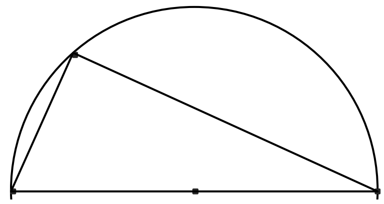
b) $\alpha = 60º$

Procedimento:

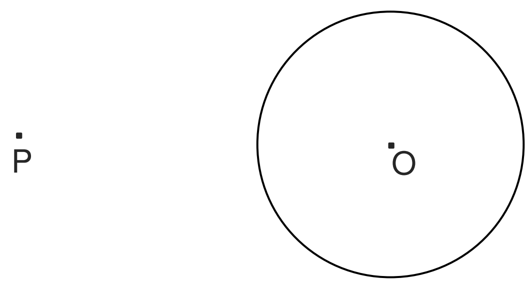
c) $\alpha=120º$

Procedimento:

2) Quanto vale o ângulo inscrito numa semicircunferência? Justifique

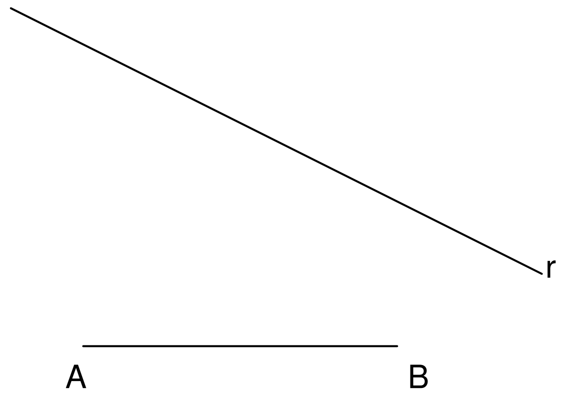


3) São dados uma circunferência λ de centro O e um ponto P exterior a mesma. Traçar por P retas tangentes a λ.



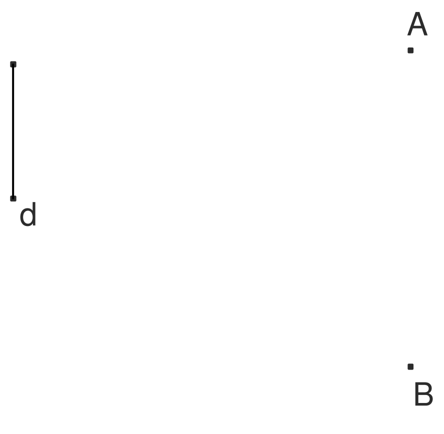
Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

4) Construir um triângulo ABC sendo dados dois vértices A e B, sabendo que o vértice C pertence à reta dada r e que $\hat{C}$ mede 60º.



Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

5) Dados dois pontos A e B e uma distância d, determine um ponto P distante d de A tal que o ângulo APB seja 60°.



Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

6) Construir um triângulo ABC, dado o vértice B, a circunf(o,r) inscrita no triângulo e a medida do lado a.

a=65 (fixo) OB=40 r=20

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

7) Dados os pontos A, B e C encontrar um ponto P do qual se possa ver os segmentos AB e BC segundo ângulos constantes α e β respectivamente.

$\alpha = 60°$ $\beta = 30°$ d(A,B)=35 d(A,C)=65 d(B,C)=30

8) Construir o triângulo ABC, retângulo em A, dados um cateto e o ângulo oposto. b=2cm, $\hat{B}$ =30°.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

9) Construir o triângulo ABC, retângulo em A, dados as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. m=2cm, n=3cm

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

10) Construir triângulo ABC, dados dois ângulos $\hat{B}$=60° e $\hat{C}$=45°, e uma altura. h_a=3,5cm.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

11) Construir triângulo ABC, dados dois ângulos $\hat{B}$=60° e $\hat{C}$=45°, e uma bissetriz. b_a=4cm.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

12) Construir o triângulo ABC, dados dois lados e a altura relativa ao terceiro lado. $b=4{,}5cm$, $c=4cm$, $h_a=3cm$.

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

13) Construir o triângulo ABC, dados um lado, ângulo oposto e a altura relativa ao mesmo. $a=3{,}5cm$, $h_a=2{,}5$, $\hat{A}=45°$.

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

14) Construir o triângulo ABC, dados um lado, altura relativa ao mesmo e altura relativa a outro lado. $a=5cm$, $h_a=3,5cm$, $h_b=4cm$.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

15) Construir o triângulo ABC, dados um lado e as alturas relativas aos outros lados. $a=5cm$, $h_b=4cm$, $h_c=4,5cm$.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

16) Construir o triângulo ABC, dados lado, mediana relativa ao mesmo e a altura relativa ao outro lado. a=6cm, m_a=3,5cm, h_b=5cm.

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

11 DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM PARTES PROPORCIONAIS

“O **Teorema de Tales** foi proposto pelo filósofo grego Tales de Mileto, e afirma que: quando duas retas transversais cortam um feixe de retas paralelas, as medidas dos segmentos delimitados pelas transversais são proporcionais.”

Exercícios

1) Dividir os segmentos em n de partes iguais.

n=3

n=7

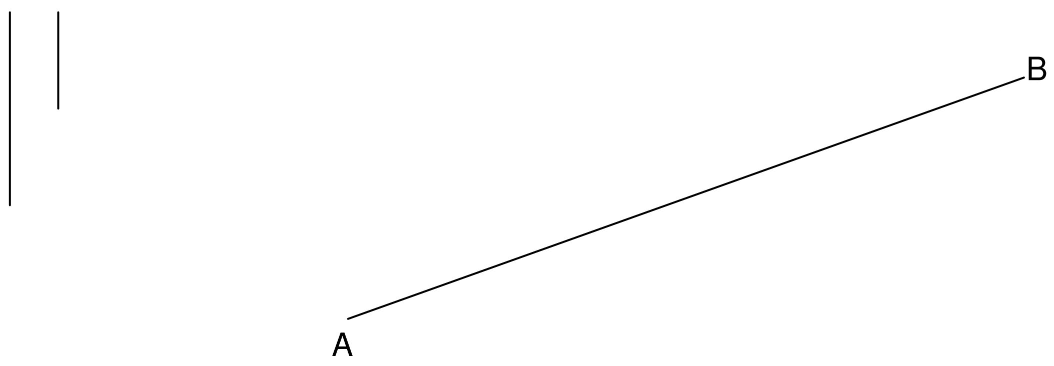
n=5

2) Dividir um segmento de 65 mm em n partes iguais.

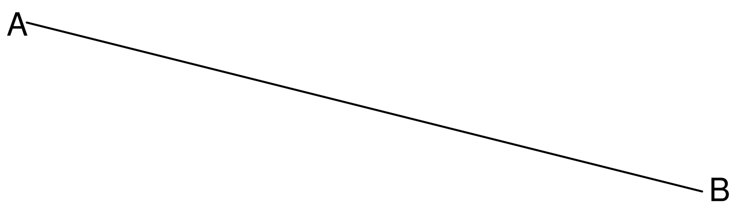
a) n= 3, utilizando uma reta auxiliar.

b) n= 6, utilizando duas retas paralelas auxiliares.

3) Dividir um segmento AB em partes proporcionais a segmentos dados.

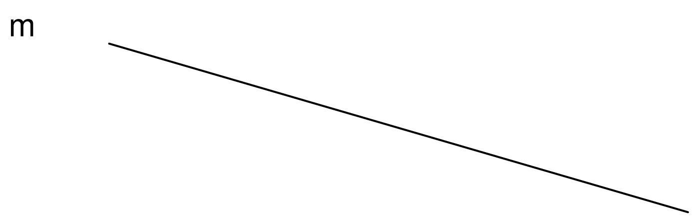


4) Dividir um segmento AB em partes proporcionais aos números dados: 2, 3 e 5.



5) Construir um triângulo ABC, sabendo que $a=2/3\ x$, $x=75$, $\hat{A}=30^{\circ}$ e $h_a=40$

6) Dado um segmento m, obter um segmento x, tal que $x = 2/5m$.



Procedimento:

7) São dados os segmentos p=10cm, q=1,5cm, r=2,5cm e s=3cm. Construir um triângulo ABC de perímetro igual a p, sabendo-se que os lados a, b e c são proporcionais a q, r e s, respectivamente.

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

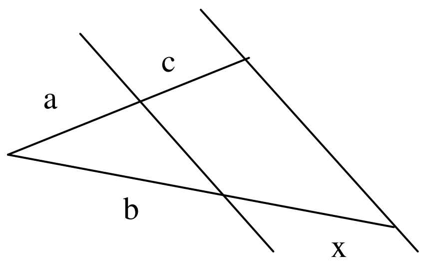
8) Construir um triângulo ABC, sendo dados a+b = 9cm e o ângulo C = 60º, e sabendo-se que a e b são proporcionais à 2 e 3, respectivamente.

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

11.1 QUARTA PROPORCIONAL

Definição: Dados três segmentos (ou números) a, b e c, a quarta proporcional aos três segmentos é um segmento (ou número) x, tal que, na ordem dada, eles formem uma proporção:

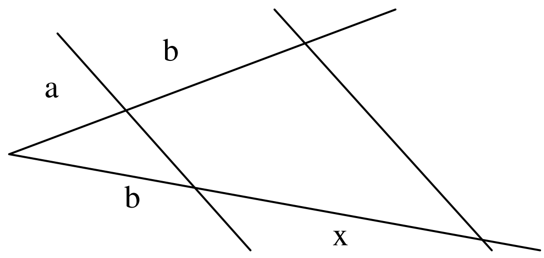
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$



11.2 TERCEIRA PROPORCIONAL

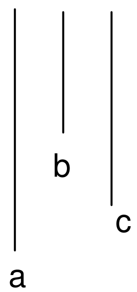
Definição: Dados dois segmentos (ou números) a e b, a terceira proporcional aos dois segmentos é um segmento x, tal que, na ordem dada, eles formem uma proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

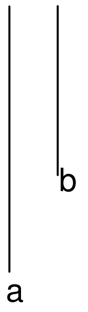


Exercício

1) Dados os segmentos a, b e c obter a quarta proporcional nesta ordem.



2) Obter a terceira proporcional x aos segmentos a e b, nessa ordem. Construir o triângulo ABX.



Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

3) São dados os segmentos $l=3$cm, $m=3{,}5$cm e $n=4$cm. Construir um triângulo ABC, sabendo-se que $\hat{A}=60^{\circ}$, $a=(m.n)/l$ e $b=l^2/n$.

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

4) São dados os segmentos a=30mm, b=40mm, c=50mm e d=25mm. Determinar graficamente:

a) a quarta proporcional entre a, b e d

c) a terceira proprocional entre a e c

11.3 DIVISÃO HARMÔNICA

Definição: Dado um segmento AB e dois segmentos (ou números) p e q, os pontos M e N determinam uma divisão harmônica de A e B segundo a razão p/q se AM/BM=-p/q e AN/BN=+p/q.

O ponto M divide internamente o segmento AB e N o divide externamente.
Dizemos que M e N são os conjugados harmônicos de A e B segundo a razão p/q.

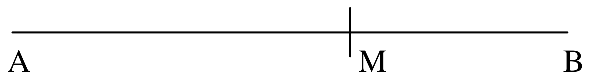
Exercícios

1) Dividir um segmento AB harmonicamente na razão dada k.
k=7/2

k=2/7

2) Obter os conjugados harmônicos do segmento dado AB na razão dada k=3/5. (terceiro e quarto harmônicos).

3) Sejam M e N os conjugados harmônicos de A e B. Dados A, M e B, determinar N.



4) Dado AB=100, encontrar P e Q, conjugados harmônico deste, sendo k=40/15, ou seja, AP/BP=40/15 e AQ/BQ=40/15.

5) Construir o triângulo ABC, sendo dados: a=45mm, m_b=35mm e m_c=60mm

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

6) Construir o triângulo ABC, sendo dados: a=80mm, m_a =45mm e C=30°

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

7) Construir o triângulo ABC, sendo dados: b=50mm, c=70mm e m_b=72mm

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

8) Construir o triângulo ABC, sendo dados: a=43mm, m_a=40mm e m_b=38mm

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

9) Construir o triângulo ABC, sendo dados: Dados l=30, m=35, n=40. Construir um triângulo ABC, sabendo que:

Â=60º a=m.n/l $b=l^2/n$

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

10) Construir o triângulo ABC, um ângulo, mediana relativa ao lado oposto e outra mediana. $\hat{A}=60°$, $m_a=5cm$, $m_c=4cm$.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

11) Construir o triângulo ABC, dados as medianas. $m_a=3cm$, $m_b=4cm$, $m_c=5cm$.

<u>Dica:</u> G' simétrico de G em relação a um dos pontos médios dos lados.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

12 LG 6 CIRCUNFERÊNCIA DE APOLÔNIO

Propriedade: O lugar geométrico dos pontos do plano cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante compõe-se de uma circunferência.

O diâmetro da cricunferência é formado pelos conjugados harmônicos dos pontos fixos, logo o centro da circunferência é o ponto médio dos conjugados harmônicos.

Exercícios

1) Construir o lugar geométrico dos pontos P tais que a razão das distâncias aos pontos dados A e B, com AB=40, seja:

a) 5/3 b)3/5

2) Construir um triângulo ABC dados o lado a=4cm, h_a=3cm e b/c=3/5.

3) Obter o ponto do qual possamos ver um segmento dado AB segundo um ângulo α tal que a razão das distâncias do mesmo às extremidades do segmento dado seja λ.

Dados: AB= 3,5cm; α=45°, λ=2/5

5) Construir um triângulo ABC dados o lado a=3,5cm, $\hat{B}$ =105°, e b/c=7/4.

6) Construir um triângulo ABC do qual conhecemos a base a, a altura relativa à esta base e a razão λ dos outros dois lados.

Dados: a=5cm; ha=1,5cm; λ=1/3

7) Construir um triângulo ABC dados.

a=35 âng. B=105º b/c=7/4

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

8) Construir um triângulo ABC do qual, se conheça o lado c, a altura relativa a este e a razão dos outros dois lados.

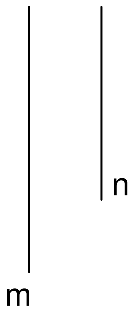
c=50 h_c=15 CA/CB=1/3

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

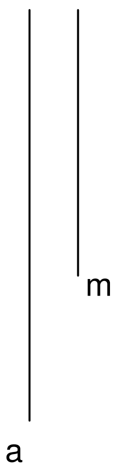
13 MÉDIA GEOMÉTRICA (OU MÉDIA PROPORCIONAL)

Exercícios

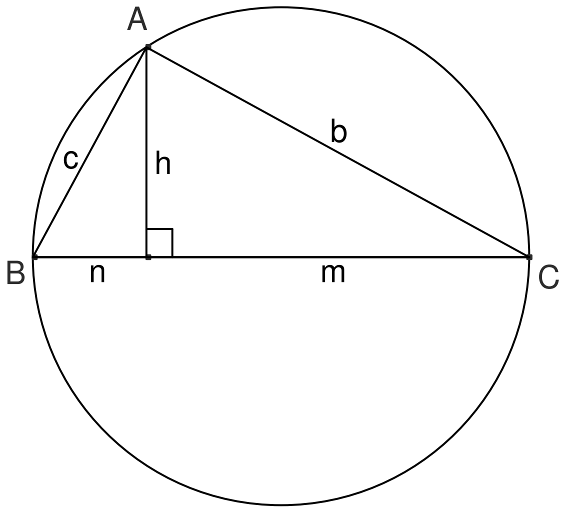
1) Construir um triângulo retângulo, sendo dadas as projeções *m* e *n* dos catetos *b* e *c*, respectivamente.



2) Construir um triângulo retângulo, sendo dados a hipotenusa *a* e a projeção *m* do cateto *b* sobre a hipotenusa.



Propriedade: Sejam *m* e *n* as projeções ortogonais dos catetos *b* e *c*, respectivamente, sobre a hipotenusa *a* de um triângulo retângulo ABC. Tem-se então que: $b^2=a.m$, $c^2=a.n$ e $h^2=m.n$, sendo *h* a altura relativa ao ângulo reto.

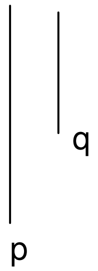


Definição: Dados dois segmentos p e q, a **média geométrica** (ou média proporcional) entre eles é um segmento x, tal que:

$$\frac{p}{x} = \frac{x}{q} \quad \text{ou} \quad x^2 = p.q \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{p.q}$$

Exercícios

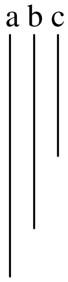
1) Obter a média geométrica entre os segmentos p e q dados



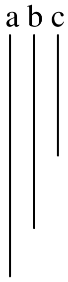
2) Dado o segmento p=20mm, obter $x = p.\sqrt{2}$ (dica: $x = p.\sqrt{2} \Rightarrow x^2=p^2.2 \Rightarrow x^2=p.p.2 \Rightarrow$ $\mathbf{x^2=2p.p}$)

3) Obtenha graficamente o valor aproximado de $(5,3 \times 3,8)^{1/2}$.

4) Dados a, b e c. Obter um segmento x tal que $x^2 = (a+b).c$.



5) Dados a, b e c. Obter um segmento x tal que $x^2 = a^3.b /c^2$.

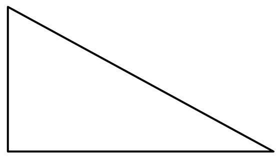


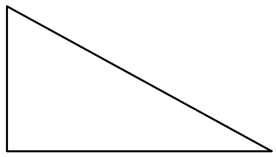
6) Dado o segmento p, obter y tal que: $\frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{p}{\sqrt{5}}$.

p

14 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

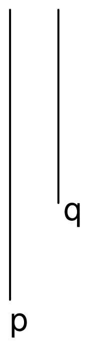
Teorema de Pitágoras: Num triângulo retângulo de hipotenusa *a* e catetos *b* e *c* tem-se que $a^2=b^2+c^2$.



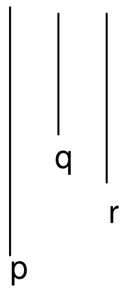


Exercícios

1) Dados p e q obter x e y, tal que $x^2 = p^2 + q^2$ e $y^2 = p^2 - q^2$



2) Dados p, q e r obter x tal que $x^2 = p^2 + q^2 + r^2$ e $y^2 = p^2 + q^2 - r^2$



3) Dado p, obter x, utilizando o teorema de Pitágoras, tal que $x = p\sqrt{15}$.

(Dica: obtenha $x = p\sqrt{15} \Rightarrow x^2 = p^2 + p^2 + (2p)^2 + (3p)^2$*) ou* $x = p\sqrt{15} \Rightarrow x^2 = (4p)^2 - p^2$ *)*

p

4) Construir um triângulo ABC, retângulo em A, dados os catetos c=25 e sabendo que sua projeção ortogonal sobre a hipotenusa é áureo deste.

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

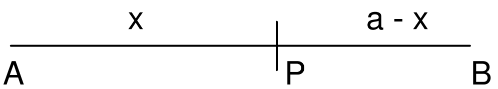
15 SEGMENTO ÁUREO (DIVISÃO EM MÉDIA E EXTREMA RAZÃO)

Definição: Dado um segmento $\overline{AB}$ diz-se que se efetua uma divisão áurea de AB por meio de um ponto P quando este ponto divide o segmento em duas partes desiguais, tal que a maior (*esta é o segmento áureo*) é média geométrica entre a menor e o segmento todo.

Assim, o segmento $\overline{AP}$ é áureo do segmento dado $\overline{AB}$ quando $\overline{AP}^2 = \overline{PB} \, . \, \overline{AB}$ ou, é o mesmo que $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{AP}}$.

15.1 ENCONTRAR O SEGMENTO ÁUREO AP CONHECENDO O SEGMENTO AB

Seja o segmento $\overline{AB}$ de medida a, como queremos a medida do segmento áureo de $\overline{AB}$ consideremos $\overline{AP}$=x, onde x é uma medida a ser determinada. Logo, $\overline{PB}$=(a-x).



Como $\overline{AP}$ deve ser áureo de $\overline{AB}$ então deve satisfazer a seguinte relação:

$\overline{AP}^2 = \overline{AB} \, . \, \overline{PB}$ ou x^2 = a.(a-x)

$x^2 = a^2$ - a.x

x^2 + a.x - a^2 = 0 *(eq. do 2º grau, na incógnita x)*

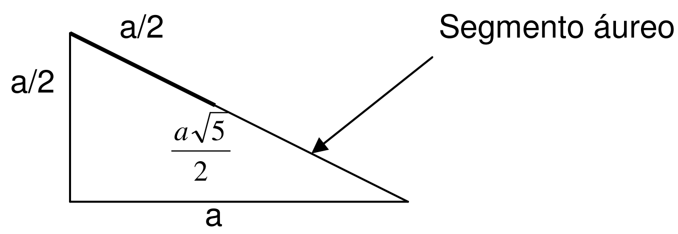
Portanto, a solução desta equação é:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \dfrac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} - \dfrac{a}{2} \\ x'' = \dfrac{-a - a\sqrt{5}}{2} = -\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2} + \dfrac{a}{2}\right) \end{cases}$$

Consideremos destas duas raízes apenas x' (por ter medida menor que a= $\overline{AB}$). Para determinarmos a medida do segmento áureo devemos obter um segmento com a medida x, ou seja, obter os segmentos de medidas:

$$\frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ e } \frac{a}{2}.$$

Basta observar que estas medidas são hipotenusa e cateto de um triângulo retângulo de catetos *a* e *a/2*.



Conhecendo segmento $\overline{AB}$ *, encontre o segmento áureo* $\overline{AP}$

15.2 DADO O SEGMENTO AB OBTER AQ, DO QUAL AB É ÁUREO

Conhecemos agora a medida do segmento áureo $\overline{AB}$, fazendo $\overline{AB}$=a e $\overline{AQ}$=x (pois devemos achar sua medida) então $\overline{BQ}$=(x-a).

Como $\overline{AB}$ deve ser áureo de $\overline{AQ}$ então pela definição devemos ter:

$\overline{AB}^2 = \overline{BQ}\,.\,\overline{AQ}$, ou seja, $a^2 = (x-a).x$

$a^2 = x^2 - a.x$

$x^2 - ax - a^2 = 0$

Portanto, a solução desta equação é:

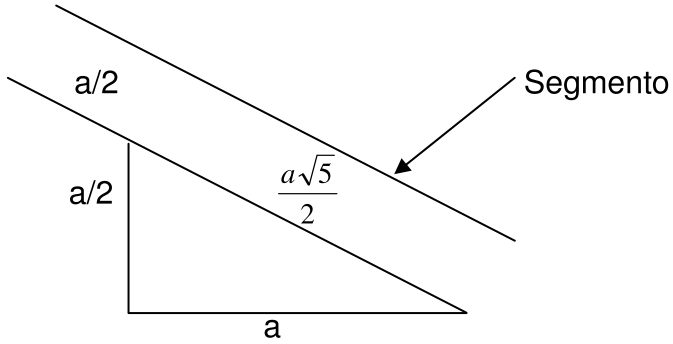
$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \dfrac{a + a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} + \dfrac{a}{2} \\ x'' = \dfrac{a - a\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{a\sqrt{5}}{2} + \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

Consideremos apenas a primeira raiz x'. Assim, para obter a medida de $\overline{AQ}$ basta construir um triângulo retângulo, onde:

a e $\frac{a}{2}$ são os catetos

e

$\frac{a\sqrt{5}}{2}$ é a hipotenusa.



Encontre o segmento $\overline{AQ}$*, cujo segmento áureo seja* $\overline{AB}$*.*

Observações:

1) Segundo Euclides é dividir um segmento em média e extrema razão.

2) A existência de duas raízes indica que existem dois pontos P e P_2 que dividem o segmento AB em duas partes desiguais, tal que a maior seja média geométrica entre a menor e o segmento todo. Mas somente o segmento AP é dito segmento áureo de AB. Sendo então, o segmento P_2A áureo de P_2B.

c) $\frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \cong 0{,}618a$, $\frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1) \cong 1{,}618a$ e $\Phi \cong 1{,}618$.

Exercícios

1) Construir o segmento áureo de um segmento AB = 100mm de medida. Qual é, aproximadamente, a medida desse segmento? Justifique algebricamente.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

2) Defina retângulo áureo. Construa um retângulo áureo.

3) Defina e construa espiral áurea.

4) Dado AB=40, construir:

a) o segmento áureo de AB.

b) o segmento do qual AB é áureo.

3) Dados m=60, n=40 e p=50. Construir um triângulo ABC, sabendo que:
a é áureo de m b^2=p.n c é a terceira proporcional entre p e n, nesta ordem.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

4) Construir um triângulo equilátero sabendo que a medida do lado é o segmento áureo do segmento y, sendo y áureo de RS=80.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

5) Construir um triângulo PQR, dado p=60 e sabendo que q é áureo de p e ainda que a medida do ângulo P é 30º.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

6)Construir um triângulo FGH, sabendo que g/h=3/5 e sabendo que h_f é áureo de f, sendo f = 60.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

7) Construir um triângulo ABC dados a=45, Â=30º e sabendo que o lado b é áureo do lado a.

Quantidade de soluções obtidas:
Procedimento:

16 POTÊNCIA DE PONTO

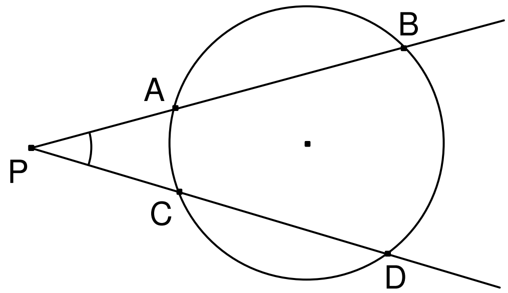
Propriedade: Consideremos uma circunferência qualquer de centro O e raio r, e um ponto P. Por P podemos traçar infinitas retas cortando a circunferência nos pontos A e B, C e D, E e F, etc, então, denomina-se potência de ponto com relação a uma circunferência, a relação:

$$PA.PB = PC.PD = PE.PF = ... = k,$$

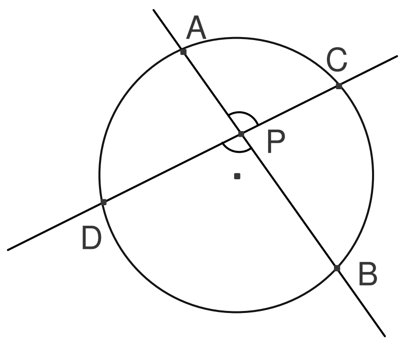
para cada posição para P existe uma constante k, chamada potência do ponto P em relação a Circunf(O,r).

Justificativa:

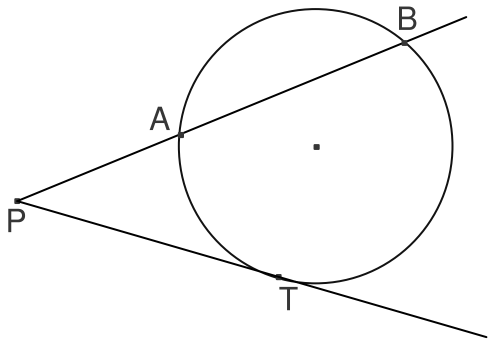
1o Caso: P é externo à circunferência;



2o Caso: P é interno à circunferência;



3o Caso: P é externo e uma das retas é tangente a circunferência num ponto T ($\overline{PT}^2 = \overline{PA}.\overline{PB}$).



Observações:

a) Se P é externo à circunferência a potência k é positiva;

b) Se P é interno à circunferência a potência k é negativa;

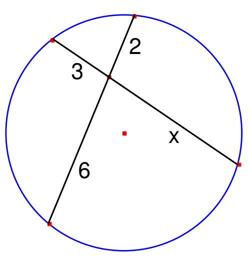
c) Se P é ponto da circunferência então a potência k é nula;

d) Para cada posição do ponto P a potência possui um valor distinto k.

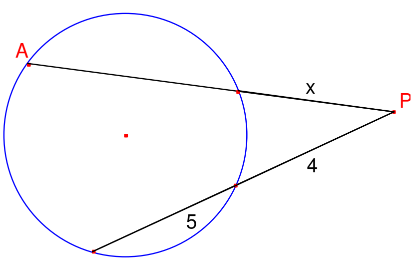
Exercícios

1) Calcular o valor de x.

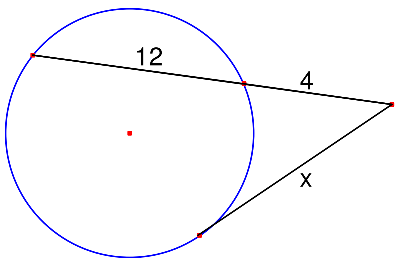
a)



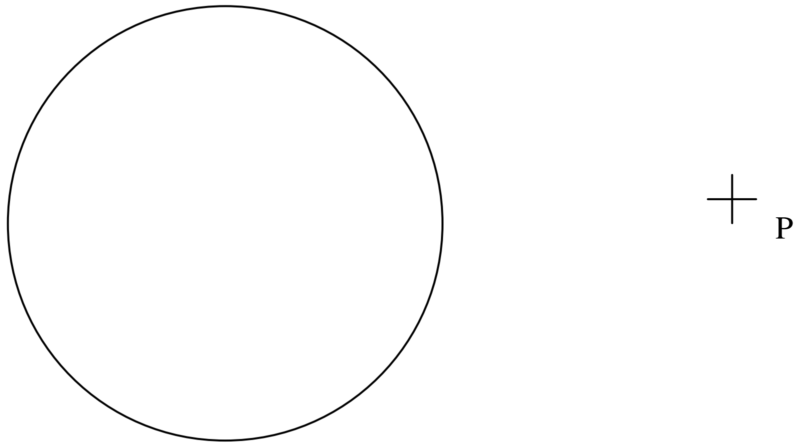
b) PA=12



c)



2) Traçar tangentes à circunferência dada, que passem pelo ponto P dado, sem usar o centro da mesma.



3) Dada uma circunf(O,30), calcular as potências dos pontos P e Q em relação a esta circunferência, sabendo que d(O,P)=d(O,Q)=70).

4) Dividir um segmento de AB em partes inversamente proporcionais aos segmentos a, b e c dados.

a) a=30 b=25 c=35 AB=75

b) a=15 b=30 c=25 AB=60

5) Construir o triângulo ABC, um lado, um ângulo e o raio da circunferência inscrita. b=6cm, r=1,5cm, Â=90°.

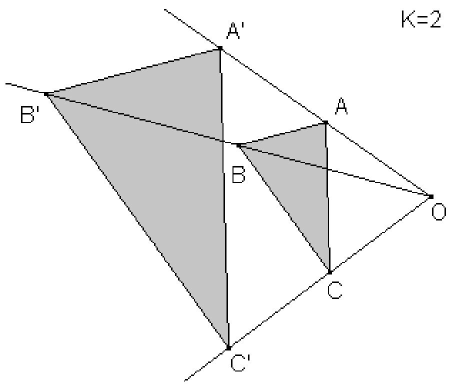
Quantidade de soluções obtidas: Procedimento:

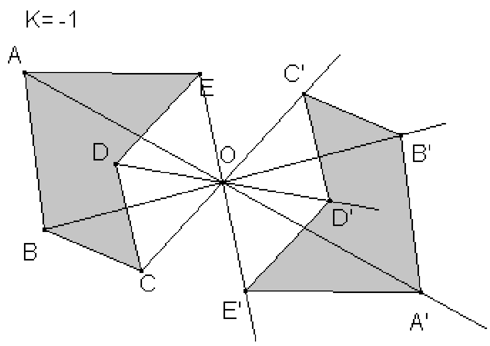
17 HOMOTETIA

Dizemos que um ponto A’ é homotético de A, em relação a um centro O (centro de homotetia) e a um número real k (razão homotética) se o ponto A’ pertence a reta OA e existe um número real k tal que OA’=|k|.OA.

Para k>0 (homotetia direta), o ponto O é exterior a AA’

Para k<0 (homotetia indireta), o ponto O é interior a AA’

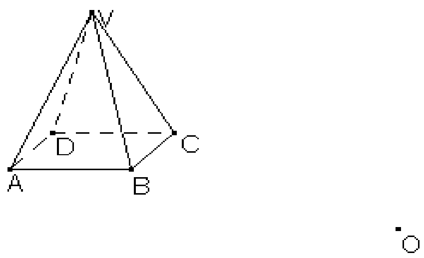




Por semelhança de triângulos, mostra-se que os lados homólogos são paralelos

Exercício

1) Desenhe a ampliação da Pirâmide de base quadrada representada na figura, na razão k=3, sendo dado o centro de homotetia.



2) Construir triângulo ABC, dados dois ângulos $\hat{B}$=60° e $\hat{C}$=45°, e uma mediana. m_a=4,5cm.

Quantidade de soluções obtidas: Procedimento: