Teoría – Tema 3

Teoría - 13 - raíces en forma polar

Radicación de complejos en notación polar

Si aplicamos raíz n-ésima a un complejo en notación polar, obtenemos:

$$\sqrt[n]{r_\alpha}=r'_\beta \quad ==> \quad r_\alpha=(r'_\beta)^n \quad ==> \quad r_\alpha=(r')^n_{n\cdot\beta} \quad \text{, con} \quad n\in\mathbb{N}$$

Y dos complejos en forma polar son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos también lo son (o se diferencian un número de vueltas completas de 360º en el plano complejo). Es decir:

$$r=(r')^n \;\rightarrow\; \sqrt[n]{r}=r'$$

$$\alpha+360^\circ\cdot k=n\cdot\beta \;\rightarrow\; \frac{\alpha+360^\circ\cdot k}{n}=\beta \quad \text{, con} \quad n\in\mathbb{N} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

Si rompemos la igualdad de argumentos en dos fracciones: $\frac{\alpha}{n}+360^\circ\cdot\frac{k}{n}=\beta$

¿Cuántas soluciones distintas de la raíz n-ésima tenemos en una vuelta de 360º?

$$si\ k=0 \;\rightarrow\; \frac{\alpha}{n}=\beta_1 \qquad\qquad si\ k=1 \;\rightarrow\; \frac{\alpha}{n}+360^\circ\cdot\frac{1}{n}=\beta_2$$

$$si\ k=2 \;\rightarrow\; \frac{\alpha}{n}+360^\circ\cdot\frac{2}{n}=\beta_3 \qquad\qquad si\ k=3 \;\rightarrow\; \frac{\alpha}{n}+360^\circ\cdot\frac{3}{n}=\beta_4$$

....

....

$$si\ k=n-1 \;\rightarrow\; \frac{\alpha}{n}+360^\circ\cdot\frac{n-1}{n}=\beta_n \qquad\qquad si\ k=n \;\rightarrow\; \frac{\alpha}{n}+360^\circ\cdot\frac{n}{n}=\frac{\alpha}{n}+360^\circ=\beta_1$$

Es decir, para $k=n$ obtenemos el mismo argumento $\frac{\alpha}{n}$ que obtuvimos en $k=0$, diferenciado por una vuelta de 360º. Por lo tanto: en una vuelta de 360º tenemos n raíces n-ésimas distintas.

Raíz n-ésima de un número complejo en forma polar.

$\sqrt[n]{r_\alpha}=(\sqrt[n]{r})_{\frac{\alpha+360º\cdot k}{n}}$, con $k=0,1,2,3,\ldots,n-1$

El complejo $z=r_\alpha$ tiene n raíces n-ésimas distintas. Para $k\geq n$ y $k<0$ repetimos los mismos argumentos contenidos en una vuelta completa de 360º.

Las raíces n-ésimas de $z=r_\alpha$ forman los vértices de un polígono regular de n lados, centrado en el origen del plano complejo, inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$.

Ejemplo 1 resuelto

Calcula las raíces cuartas de $81_{120º}$.¿Qué figura forman sus afijos?

Debemos obtener $\sqrt[4]{81_{120º}}=(\sqrt[4]{81})_{\frac{120º+360º\cdot k}{4}}$, con $k=0,1,2,3$

Para cada valor de k obtenemos una raíz cuarta:

$$z_0=(\sqrt[4]{81})_{\frac{120º+360º\cdot 0}{4}}=3_{30º}$$

$$z_1=3_{\frac{120º+360º\cdot 1}{4}}=3_{120º}$$

$$z_2=3_{\frac{120º+360º\cdot 2}{4}}=3_{210º}$$

$$z_3=3_{\frac{120º+360º\cdot 3}{4}}=3_{300º}$$

Por supuesto, en cada raíz podemos sumar todas las vueltas completas de 360º que deseemos y seguiríamos obteniendo un complejo equivalente.

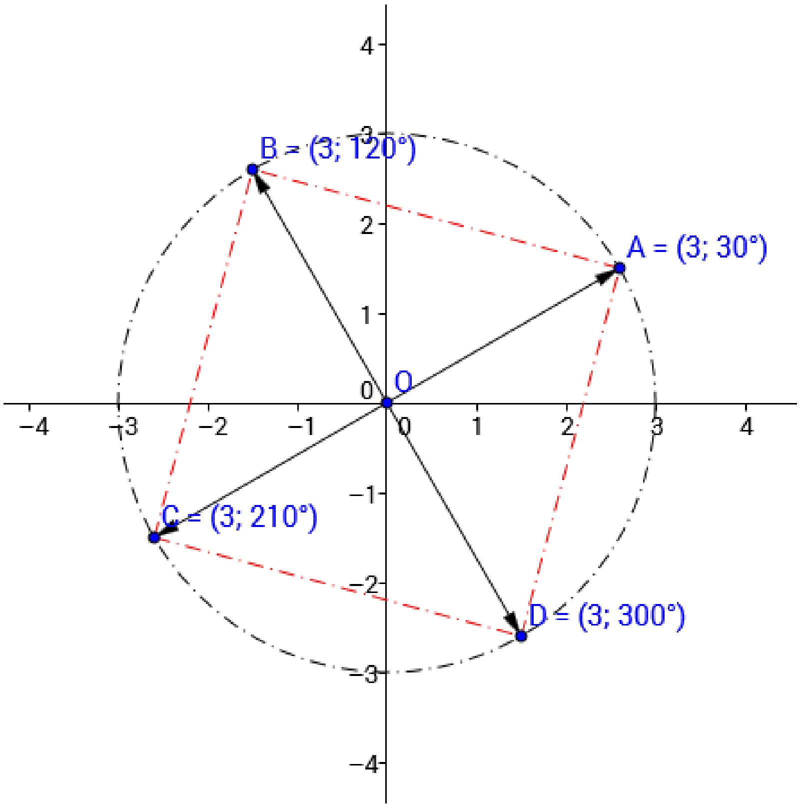
También puedes comprobar que para $k=4$ $\rightarrow$ $z_4=3_{390º}=3_{30º}=z_0$ $\rightarrow$ Recuperamos la primera de las raíces.

Al calcular las raíces cuartas del ejemplo anterior, $z=81_{120º}$, obtenemos cuatro valores distintos.

Estos valores coinciden con los vértices de un cuadrado, inscrito a su vez en una circunferencia de radio 3 . Es decir, el radio tiene como longitud la raíz cuarta de 81 .

En la siguiente gráfica hemos representado los cuatro valores solución en el plano complejo, junto a la circunferencia que circunscribe al cuadrado ya indicado.

La distancia entre vértices consecutivos se puede calcular o bien por el Teorema del coseno (formando un triángulo con el origen de coordenadas y dos vértices consecutivos del cuadrado), o bien con la expresión general de distancia entre dos puntos, que estudiaremos más adelante en el tema.



Podemos preguntarnos por la longitud del lado del cuadrado. Dos puntos cualesquiera del plano complejo $A(a,b)$ y $B(c,d)$ estarán separados una distancia que puede calcularse de la siguiente forma:

$$distancia(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$$

Si en nuestro ejemplo tomamos como muestra los puntos A y B , tendremos:

$$A=3_{30^o}=3\cdot cos30^o+3\cdot sen30^o\cdot i=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot i \quad\rightarrow\quad A(a,b)=(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$$

$$B=3_{120^o}=3\cdot cos120^o+3\cdot sen120^o\cdot i=3\cdot\frac{-1}{2}+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \quad\rightarrow\quad B(c,d)=(\frac{-3}{2},\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2})$$

$$distancia(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{(\frac{-3}{2}-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2})^2}=\sqrt{(\frac{-3-3\cdot\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{3\cdot\sqrt{3}-3}{2})^2}$$

$$distancia(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{\frac{9+27+18\cdot\sqrt{3}}{4}+\frac{27+9-18\cdot\sqrt{3}}{4}}$$

$$distancia(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{\frac{72}{4}}=\sqrt{18}\simeq 4{,}243 \quad u$$