Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 5 - indeterminación infinito menos infinito en cociente de polinomios y raíces

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{5}\right)=\infty-\infty$ → Indeterminación → Hacemos m.c.m.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+5-2x-8}{10}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-3}{10}\to evaluar\to\frac{\infty-3}{10}=\frac{\infty}{10}=+\infty$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(8x-\sqrt{16x^2+x-3}\right)=\infty-\infty$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(8x-\sqrt{16x^2+x-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(8x-\sqrt{16x^2+x-3}\right)\left(8x+\sqrt{16x^2+x-3}\right)}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}$$

En el numerador tenemos suma por diferencia, igual a diferencia de cuadrado. Las raíces del numerador se van con el cuadrado correspondiente del binomio de Newton.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{64x^2-16x^2-x+3}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}\to \text{Evaluar}\to\lim_{x\to+\infty}\frac{48x^2-x+3}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Llegamos a una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Recuerda que el polinomio de grado dos dentro de la raíz cuadrada se comporta, en el infinito, como un polinomio de grado uno.

Debemos dividir por la máxima potencia, en este caso x^2 . Recuerda que cuando x^2 entra dentro de la raíz, lo hace como x^4 .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{48x^2/x^2-x/x^2+3/x^2}{8x/x^2+\sqrt{16x^2/x^4+x/x^4-3/x^4}}\to simplificar$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{48-1/x+3/x^2}{8/x+\sqrt{16/x^2+1/x^3-3/x^4}}\to evaluar\ recordando\ \frac{k}{\infty}=0$$

$$\frac{48-1/\infty+3/\infty}{8/\infty+\sqrt{16/\infty+1/\infty-3/\infty}}=\frac{48}{0}=+\infty$$

Fíjate que el signo del infinito de la solución final es positivo porque el coeficiente que acompaña a x^2 en el numerador es positivo, y los dos coeficientes que acompañan a la máxima potencia en el denominador también son positivos.

c) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+ax}-2x)=\frac{1}{3}$

Debemos calcular el límite e igualar a $\frac{1}{3}$ para obtener a

$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+ax}-2x)=\infty-\infty$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+ax}-2x)=\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+ax}-2x)(\sqrt{4x^2+ax}+2x)}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}=\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+ax-4x^2}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{\sqrt{4x^2+ax}+2x}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación

Tenemos un cociente de polinomios del mismo grado, ya que en el infinito el polinomio de grado dos del denominador se comporta como un polinomio de grado uno.

Dividimos todo por la máxima potencia, que es x. Una vez más, recuerda que cuando x entra dentro de la raíz, lo hace como x^2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax/x}{\sqrt{4x^2/x^2+ax/x^2}+2x/x} \to simplificar \to \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{\sqrt{4+a/x}+2}$$

Evaluamos, recordando que $\frac{k}{\infty}=0$ → $\frac{a}{\sqrt{4+a/\infty}+2}=\frac{a}{\sqrt{4+0}+2}=\frac{a}{2+2}=\frac{a}{4}$

Igualamos el valor del límite al resultado dado por el enunciado:

$\frac{a}{4}=\frac{1}{3}$ → $a=\frac{4}{3}$

2. Resuelve $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{\infty-\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por conjugado del numerador.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x-x-1}{x+x+1+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{2x+1+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

3. Resuelve:

a) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{25x^2-7}-5x)=\infty-\infty$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{25x^2-7}-5x)(\sqrt{25x^2-7}+5x)}{\sqrt{25x^2-7}+5x}=\lim_{x \to +\infty} \frac{25x^2-7-25x^2}{\sqrt{25x^2-7}+5x}=\lim_{x \to +\infty} \frac{-7}{\sqrt{25x^2-7}+5x}=\frac{-7}{\infty}=0$$

b) $\lim_{x \to +\infty} (\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{5})=\infty-\infty$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to +\infty} (\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{5})=\lim_{x \to +\infty} \frac{5x+5-2x-8}{10}=\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-3}{10}=+\infty$$

c) $\lim_{x \to +\infty} (8x-\sqrt{16x^2+x-3})=\infty-\infty$ → Indeterminación

$$\lim_{x \to +\infty} (8x-\sqrt{16x^2+x-3})=\lim_{x \to +\infty} \frac{(8x-\sqrt{16x^2+x-3})(8x+\sqrt{16x^2+x-3})}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}=\lim_{x \to +\infty} \frac{64x^2-16x^2-x+3}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{48x^2-x+3}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}=\frac{\infty}{\infty}$ → Grado numerador > Grado denominador

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{48x^2-x+3}{8x+\sqrt{16x^2+x-3}}=\infty$$

4. Calcula $\lim_{x \to \infty} (3x - 5\sqrt{x})$

$\lim_{x \to \infty} (3x - 5\sqrt{x}) = \infty - \infty$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(3x - 5\sqrt{x})(3x + 5\sqrt{x})}{3x + 5\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{9x^2 - 25x}{3x + 5\sqrt{x}} = \infty$$

El límite en el infinito va a infinito por tener un cociente de polinomios, con el grado del numerador mayor que el grado del denominador.

5. Calcula $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$ **.**

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=\infty-\infty$ → Indeterminación

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$

Dividimos numerador y denominador por la máxima potencia existente en los polinomios: en nuestro caso x (recordando que dentro de la raíz entra como x^2). Recordamos que $k/\infty=0$.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}\right)=\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right)=\frac{2}{2}=1$$

6. Calcula $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2-5x+4}-x)$

$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)=\infty-\infty$ → multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-5x+4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-5x+4}+x\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+4-x^2}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}\right)$$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5x+4}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}\right)$ → dividimos todo por x (máxima potencia que aparece en el cociente)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5x/x+4/x}{\sqrt{x^2/x^2-5x/x^2+4/x^2}+x/x}\right) \to \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5+4/x}{\sqrt{1-5/x+4/x^2}+1}\right)=\frac{-5}{2}$$

Donde hemos aplicado que $k/\infty=0$.

7. Determinar a para que el límite sea igual a 1 .

$$\lim_{x \to \infty} 2x-\sqrt{4x^2+ax+1}=\infty-\infty$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado para eliminar la indeterminación.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)\cdot\left(2x+\sqrt{4x^2+ax+1}\right)}{\left(2x+\sqrt{4x^2+ax+1}\right)}\right) \rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2-\left(4x^2+ax+1\right)}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-ax-1}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Que podemos resolver dividiendo por la máxima potencia de x , o bien por L'Hôpital (derivando numerado y denominador por separado).

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-a\cdot\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{2\cdot\frac{x}{x}+\sqrt{4\cdot\frac{x^2}{x^2}+a\cdot\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x \to \infty} \frac{-a-\frac{1}{x}}{2+\sqrt{4+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-a}{4}$$

Si el límite debe ser igual a 1 → $\frac{-a}{4}=1 \rightarrow a=-4$

8. Obtener el valor de k **que satisface** $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2}-\sqrt{4x^2+kx-1}=4$

Evaluamos en el límite. Recuerda que la raíz cuadrada de infinito también vale infinito. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2}-\sqrt{4x^2+kx-1}=\infty-\infty\equiv indeterminación$$

Este tipo de indeterminaciones vamos a resolverlas **multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión con radicales** (siempre que aparezcan raíces, ya sea restando o en un cociente, es buena idea aplicar esta técnica del conjugado).

Aparecerá suma por diferencia de un binomio, que se resuelve como diferencia de cuadrados.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{4x^2}-\sqrt{4x^2+kx-1})\cdot(\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1})}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1}}=\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-4x^2-kx+1}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-kx+1}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1}}$$

En el numerador tenemos un polinomio de grado 1 . Y en el denominador tenemos polinomios de grado 2 dentro de raíces cuadradas, por lo que su comportamiento en el infinito es similar al de un polinomio de grado 1 . Es decir, podemos reducir nuestro estudio al cociente de polinomios del mismo grado. El límite final será el cociente de los coeficientes que acompañan a los términos de mayor grado x^n .

En el numerador $-k$ acompaña a x , y el denominador 4 acompaña a x^2 , por lo que al estar dentro de una raíz sale como $\sqrt{4}=2$. Es decir:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-kx+1}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1}}=\frac{-k}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{-k}{2+2}=\frac{-k}{4}$$

El enunciado afirma que el límite es igual a 4 $\rightarrow$ $\frac{-k}{4}=4$ $\rightarrow$ $k=-16$

9. Calcula $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)$

$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\infty-\infty$ → indeterminación → m.c.m. sabiendo que $x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$

$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$