Teoría – Tema 2

Teoría - 10 - Teorema de Bolzano y Teorema de los valores intermedios

Teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a)\cdot f(b)<0 \rightarrow f(x)=0$ posee solución: $\exists c\in(a,b)/ f(c)=0$.

Demostración: Supongamos como **hipótesis de partida que** $f(x)$ **no posee solución en el intervalo cerrado** $[a,b]$, donde además es continua y cambia de signo en los extremos del intervalo.

Dividamos el intervalo cerrado $[a,b]$ en dos partes iguales: $[a,\frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2},b]$, donde c será el punto medio: $c=\frac{a+b}{2}$.

Si $f(c)=0$ se cumpliría el teorema y la demostración terminaría.

Si $f(c)\neq 0$, entonces la función tomará valores de distinto signo o bien en $[a,\frac{a+b}{2}]$ o bien en $[\frac{a+b}{2},b]$. Si tomamos el intervalo donde la función cambia de signo en sus extremos, y lo volvemos a dividir en dos, podemos repetir el razonamiento anterior.

Procediendo así de manera sucesiva, obtendremos una secuencia de intervalos encajados en la que todos satisfacen que en sus extremos la función cambia de signo y cuyas amplitudes (por el postulado de Cantor) convergen a un único punto $\alpha\in[a,b]$.

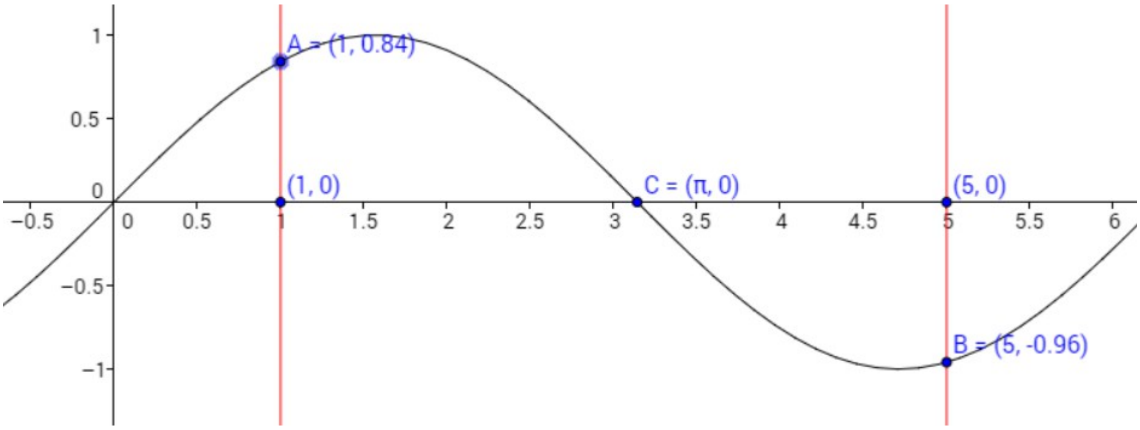
Si este valor $\alpha\in[a,b]$ cumple $f(\alpha)\neq 0$, como la función es continua en todo el intervalo y, en consecuencia, continua en α , existirá un entorno alrededor de α donde todos los puntos del entorno poseen el mismo signo que $f(\alpha)$.

Por lo que llegamos a una contradicción. Por un lado el punto α lo hemos obtenido como intersección de sucesivos intervalos donde la función cambia de signo en sus extremos. Y por otro lado, por continuidad, existe un entorno alrededor de α que contiene intervalos donde la función no cambia de signo.

En consecuencia, **la hipótesis de partida es falsa y** $f(x)$ **sí posee solución en el intervalo abierto** (a,b) **implica que** $\exists c\in(a,b)/ f(c)=0$.

La interpretación geométrica del teorema afirma que, si se cumplen las condiciones iniciales, la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas al menos en el punto $(c,0)$ comprendido entre los puntos $(a,0)$ y $(b,0)$.

-------- $f(x)$ *arbitraria, corta al eje horizontal en un punto perteneciente al intervalo* $(1,5)$



Teorema de los valores intermedios

Teorema de los valores intermedios

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ $\rightarrow$ $f(x)$ toma cualquier valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$.

Demostración: Si $f(a)=f(b)$ el único valor comprendido entre los extremos de la función es el propio $f(a)=f(b)$, por lo que el teorema estaría demostrado.

Si $f(a)<f(b)$ consideramos un valor c de la función que cumpla $f(a)<c<f(b)$.

Ojo, el valor c es un valor de la función $f(x)$, es decir, del eje vertical; no es un valor de la variable x del eje horizontal. **No nos liemos con la nomenclatura**.

Definamos la función auxiliar $g(x)=f(x)-c$, que será continua en $[a,b]$ ya que la función $f(x)$ es continua.

Si evaluamos la función auxiliar en los extremos del intervalo, comprobamos que cumplimos las condiciones para aplicar el teorema de Bolzano:

$$g(a)=f(a)-c<0$$
$$g(b)=f(b)-c>0$$

Por el teorema de Bolzano sabemos que existe un valor $\varphi\in(a,b)/g(\varphi)=0$. Sustituyendo esta consecuencia en la función $g(x)$:

$$g(\varphi)=f(\varphi)-c=0 \rightarrow f(\varphi)=c$$

Como c es un valor arbitrario de la función comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, hemos demostrado que siempre existe un valor del intervalo (a,b) asociado a ese valor c de la función, tal y como queríamos demostrar.

Si $f(a)>f(b)$ la demostración es totalmente análoga, usando la misma función auxiliar.

La interpretación geométrica nos dice que todo valor intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$ tiene asociado un punto del intervalo (a,b) .

-------- $f(x)$ *arbitraria*, *continua en* $[a, b]$, *toma cualquier valor del intervalo* $[f(a), f(b)]$