Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 11 - demostrar existencia de solución

1. Demuestre que la función $f(x)=2+2x-e^x$ corta al eje OX en el intervalo $(-1,1)$ y tiene un máximo relativo en ese mismo intervalo.

La función es continua en el intervalo de estudio $(-1,1)$ por ser suma de funciones continuas en todo en toda la recta real.

Además tiene distinto signo en los extremos del intervalo. Por tanto, por el teorema de Bolzano, cortará al eje OX al menos un un punto contenido en (−1, 1).

$$f\left(-1\right)= 2 - 2 - e^{-1}<0$$
$$f\left(1\right)= 2 + 2 - e^{1}>0$$

Existirá un punto $c\in(-1,1)$ tal que $f(c)=0$. En ese punto, la función corta al eje OX .

Para ver que tiene un máximo en ese intervalo hallamos la derivada primera y la igualamos a cero.

$f'\left(x\right)= 2 - e^{x}=0 \rightarrow 2=e^{x} \rightarrow x=\ln(2)\simeq 0{,}6931\in(-1,1)$ → punto crítico

Y con la segunda derivada confirmamos que estamos ante un extremo relativo.

$f''\left(x\right)= - e^{x} \rightarrow f''(ln2)=-e^{ln2}=-2<0$ → máximo en $(\ln(2),\ 2\cdot\ln(2))$

2. Demuestre que la función $f(x)=x^3-\ln(x)-5$ corta al menos una vez en el eje horizontal en el intervalo $(1,2)$.

La función es continua en el intervalo $(0,+\infty)$. Por lo tanto, también será continua en el intervalo $[1,2]$. Fíjate que ponemos intervalo cerrado, para poder aplicar las condiciones del Teorema de Bolzano.

Valoremos las imágenes en los extremos del intervalo y veamos su signo:

$f(1)=1-\ln(1)-5<0$

$f(2)=8-\ln(2)-5>0$

Hay cambio de signo en las imágenes de los extremos. Por el Teorema de Bolzano, si poseemos una función continua en $[1,2]$ y se cumple $f(1)\cdot f(2)<0$, significa que debe existir al menos un valor $c\in(1,2)/f(c)=0$.

Y hemos demostrado la existencia de al menos un punto de corte de la función con el eje horizontal. Recuerda que una función corta al eje horizontal si existe al menos un valor que anule a la función. Y eso es precisamente lo que hemos demostrado por Bolzano.

3. Demuestre que la función $f(x)=\sqrt{x}-e^x+2$ corta al menos una vez al eje horizontal en el semieje positivo de las abscisas.

La función es continua en el intervalo $[0,+\infty)$. Ese intervalo engloba a todos los valores positivos de abscisas.

Valoremos las imágenes en los extremos del intervalo y veamos su signo:

$f(0)=\sqrt{0}-e^0+2>0$

$f(\infty)=\sqrt{\infty}-e^\infty+2<0$ → evaluar en el infinito es como hacer el límite en el infinito y luego evaluar

Recuerda que la exponencial en el infinito se dispara a más infinito y su crecimiento es más potente que el de la raíz cuadrada. Por lo tanto, al tener $\sqrt{\infty}-e^\infty$ el valor final va a menos infinito debido a la mayor potencia de la exponencial

Hay cambio de signo en las imágenes de los extremos. Por el Teorema de Bolzano, si poseemos una función continua en $[0,\infty)$ y se cumple $f(0)\cdot f(\infty)<0$, significa que debe existir al menos un valor $c\in(0,\infty)/f(c)=0$.

Y hemos demostrado la existencia de al menos una solución positiva de la ecuación $\sqrt{x}-e^x+2=0$.

4. Demuestre que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}+4$ se cortan al menos una vez en el intervalo $(1,3)$.

Para obtener el punto de corte de la gráficas de dos funciones, igualamos sus ecuaciones.

$$f(x)=g(x) \rightarrow e^x=\frac{1}{x}+4 \rightarrow e^x-\frac{1}{x}-4=0$$

Es decir, si llamamos $h(x)=e^x-\frac{1}{x}-4$ nuestro problema se reduce a encontrar al menos un valor del intervalo $(1,3)$ donde esa función se anule.

La función $h(x)$ es continua en todos los reales menos el valor $x=0$. Por lo tanto, la función es continua en el intervalo cerrado $[1,3]$. Una vez más, fíjate que consideramos el intervalo cerrado para aplicar las condiciones iniciales del Teorema de Bolzano.

Valoremos las imágenes en los extremos del intervalo y veamos su signo:

$$h(1)=e^1-\frac{1}{1}-4<0$$

$$h(3)=e^3-\frac{1}{3}-4>0$$

Hay cambio de signo en las imágenes de los extremos. Por el Teorema de Bolzano, si poseemos una función continua en $[1,3]$ y se cumple $h(1)\cdot h(3)<0$, significa que debe existir al menos un valor $c\in(1,3)/h(c)=0$.

Y con esto habremos demostrado que las dos gráficas se cortan al menos una vez en el intervalo $(1,3)$.