Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 10 - posición relativa de dos planos

1. Sean los planos $\Pi_1 : 2x+2y+az=1$ **,** $\Pi_2 : 2x+ay+2z=-2$ **.**

a) Obtener el valor de a **para que los planos tengan una recta en común.**

b) Si $a=0$ **Hallar el vector director de dicha recta y sus ecuaciones paramétricas.**

a) Reducimos el problema de geometría a uno de sistemas de ecuaciones.

$$\begin{Bmatrix} 2x+2y+az=1 \\ 2x+ay+2z=-2 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Notación matricial} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & a & 1 \\ 2 & a & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Por Gauss, a la fila segunda le restamos la primera.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & a & 1 \\ 0 & a-2 & 2-a & -3 \end{array}\right)$$

Tras obtener la matriz triangular de Gauss, y comprobar que no hay filas proporcionales ni absurdos matemáticos, el rango del sistema coincide con el número de filas con al menos un coeficiente no nulo.

Discusión de casos → $a-2=0 \rightarrow a=2$

Si $a=2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$ → Absurdo en la segunda fila → $0=-3$ → Sistema Incompatible sin solución → Los planos son paralelos, sin puntos en común.

Si $a\neq 2$ → Rango 2 y 3 incógnitas → SCI con un parámetro libre → Las infinitas soluciones son los infinitos puntos de la recta de corte entre los planos.

b) Si $a=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right)$ → Sabemos que es SCI con un parámetro libre.

$y=k\in\mathbb{R}$ → La solución al sistema es la ecuación paramétrica de la recta.

$$r: \begin{Bmatrix} x=\frac{1}{2}-k \\ y=k \\ z=\frac{-3}{2}+k \end{Bmatrix}$$

Esta recta pasa por el punto $A(1/2, 0, -3/2)$ y vector director $\vec{u}_r=(-1,1,1)$.

2. Sea $A(0,0,0)$ **,** $B(2,3,1)$ **y** $C(-1,0,1)$ **.**

Sea $\Pi_1 : ax+2y-2z+5=0$ **.**

a) Obtener plano que pasa por A, B y C.

b) Estudiar posición relativa del plano Π_1 **con el plano del apartado a).**

a) Formamos dos vectores paralelos al plano a partir de los tres puntos.

$$\vec{AB}=(2,3,1)$$
$$\vec{AC}=(-1,0,1)$$

Son independientes, por no tener sus componentes proporcionales.

Con la determinación lineal del plano obtenemos la ecuación general.

$$\Pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 3 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Aplicamos Sarrus} \rightarrow \quad \Pi_2 : x-y+z=0$$

b) $\Pi_1 : ax+2y-2z+5=0$ y $\Pi_2 : x-y+z=0$

Dividimos sus componentes respectivas. Si mantienen la misma proporcionalidad, serán coincidentes. Si no se mantiene la proporcionalidad solo en el cociente de los términos independientes, serán paralelos. Y en cualquier otro caso, serán secantes en una recta.

$$\frac{a}{1}=\frac{2}{-1}=\frac{-2}{1}\neq\frac{5}{0} \rightarrow \text{Una igualdad no se cumple} \rightarrow \text{Los planos nunca serán coincidentes}$$

Si $a=-2$ → Los planos serán paralelos.

Si $a\neq-2$ → Los planos se cortan en una recta.