

Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 29 - ecuación de la esfera

1. a) Dada la recta $r: \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ y los puntos $P(1,-2,0)$ y $Q(0,1,3)$. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo al vector \vec{PQ} .

b) Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $(2,1,1)$ y que pasa por el punto $P(4,6,2)$, con la superficie esférica de centro $(1,2,-1)$ y radio $\sqrt{26}$.

a) Un plano queda determinado de manera única por un punto del plano y por dos vectores linealmente independientes del plano.

Si el plano contiene a la recta r podemos tomar el vector director de la recta como uno de los vectores del plano, y un punto de la recta como punto del plano. Para ello pasamos la recta de implícita a paramétricas.

$$r: \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \rightarrow z=\lambda \rightarrow x=\lambda, y=\lambda \rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$A(0,0,0) \in r, \vec{u}_r=(1,1,1)$$

Si el vector \vec{PQ} es paralelo al plano, podría ser nuestro segundo vector, siempre y cuando sea linealmente independiente respecto de \vec{u}_r .

$$\vec{PQ}=(-1,3,3)$$

Ambos vectores son linealmente independientes por no ser proporcionales, ya que

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Por la determinación lineal del plano podemos obtener su ecuación general.

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{PQ}, A): \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 3 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \Pi: z-y=0$$

b) Tengo una recta de vector director $\vec{u}_r=(2,1,1)$ y que pasa por el punto $P(4,6,2)$. Su

ecuación paramétrica es: $r: \begin{cases} x=4+2t \\ y=6+t \\ z=2+t \end{cases}$

Una esfera de centro (x_0, y_0, z_0) y radio r tiene ecuación general:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

La esfera del enunciado tiene centro $(1,2,-1)$ y radio $\sqrt{26}$. Por lo tanto:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=26$$

Los puntos de corte de la recta con la esfera se obtienen, por ejemplo, sustituyendo los valores en paramétricas de cada incógnita en la ecuación de la esfera.

$$(4+2t-1)^2+(6+t-2)^2+(2+t+1)^2=26$$

$$(3+2t)^2+(4+t)^2+(3+t)^2=26$$

$$(9+4t^2+12t)+(16+t^2+8t)+(9+t^2+6t)=26$$

$$6t^2+26t+8=0 \rightarrow 3t^2+13t+4=0 \rightarrow t=\frac{-13\pm\sqrt{169-48}}{6}=\frac{-13\pm\sqrt{121}}{6}=\frac{-13\pm 11}{6}$$

$$t=-4 \quad , \quad t=\frac{-1}{3}$$

Los dos puntos de corte con la esfera son:

$$t=-4 \rightarrow A(-4,2,-1)$$

$$t=\frac{-1}{3} \rightarrow B\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right)$$