A1 Partie 2 : Suites arithmétiques et géométriques

Rappels sur les notations :

Une suite est une série de nombres reliés par une formule permettant de les calculer. Il faut donc se souvenir des notations. Pour une suite nommée (u_n), les premiers termes (nombres de la série) s'écrivent :

u_0 puis u_1 puis u_2 etc... Jusqu'à u_n.
Le u signifie que l'on parle de la suite (u_n).
Les 0, 1, 2 et n sont des indices, c'est le rang du terme dans la suite. Il donne la place du terme (le premier, le second etc). Il faut donc faire attention à la notation car les indices doivent être notés en petit en dessous du u pour ne pas les confondre avec des nombres qui pourraient intervenir dans le calcul. De plus ces indices sont obligatoirement des nombres entiers puisqu'il ne peut y avoir de terme numéro 1,5 ou 1,6.

On se souviendra aussi qu'une suite est considérée comme croissante lorsque ses termes sont de plus en plus grands et décroissante lorsque ses termes sont de plus en plus petits.

La différence entre u_n et (u_n) est que le premier est le terme de rang n alors que le second signifie tout la suite.

I/ Suites arithmétiques :

1) Définition et formules :

Définition :

Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a :

$u_{n+1} = u_n + r$ (relation de récurrence)

Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Exemple :

Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 3$ $\quad u_1 = 8$ $\quad u_2 = 13$ $\quad u_3 = 18$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3. C'est-à-dire que l'on part de 3 et que l'on ajouter 5 pour passer d'un terme à l'autre.

Formules explicites

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

- Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$
- Pour tous entiers naturels n et p, on a : $u_n = u_p + (n-p)r$

Comprendre la formule :

La suite étant arithmétique, pour passer d'un terme à l'autre on ajoute toujours le même nombre r. Donc lorsque l'on passe de u_0 à u_1 on ajoute une fois la raison, de u_1 à u_2 on ajoute aussi une fois r. Donc de u_0 à u_2 on ajoute deux fois r. Pour passer à u_3, on ajoute 3 fois r. Et ainsi de suite, donc de u_0 à u_n on ajoute n fois r.

Remarques :

- La raison r vérifie $r = u_{n+1} - u_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

C'est **la variation absolue** entre deux termes consécutifs.

- De manière générale, r vérifie $r = \dfrac{u_n - u_p}{n-p}$ (pour tous n et p dans $\mathbb{N}$).

C'est **l'accroissement moyen** entre les termes u_n et u_p.

Méthode : Démontrer qu'une suite est arithmétique :

Lorsque l'on a que les premiers termes, il faut faire la différence de deux termes qui se suivent. Si l'on obtient toujours le même résultat, ce résultat est la raison de la suite et la suite est bien arithmétique.

Lorsque l'on a une formule il faut faire u_{n+1} - u_n, si le résultat est un nombre constant, celui-ci est la raison de la suite. La suite sera donc arithmétique.

Exemple :
Soit la suite définie par $u_n = 2n + 1$, démontrer que cette suite est arithmétique.
Avant de se lancer dans la démonstration vérifions si l'affirmation est cohérente en calculant u_0, u_1 et u_2.
$u_0 = 1$ $u_1 = 3$ $u_2 = 5$. Vérifions ensuite que $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$. Ici c'est bien le cas donc on peut supposer que la suite est bien arithmétique et le démontrer. Si cela n'avait pas été le cas aucune autre démonstration n'est nécessaire pour en conclure que la suite n'est pas arithmétique.
Démontrons que la suite est arithmétique :
Expression de $u_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 2 + 1 = 2n + 3$.
Calcul de $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 - (2n + 1) = 2n + 3 - 2n - 1 = 2$
La différence de deux termes successifs est constante donc la suite est bien arithmétique.

2) Variations :

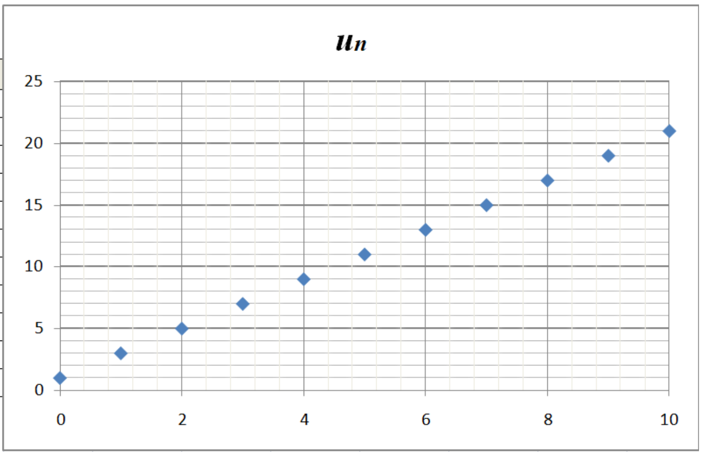
Propriété :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

$u_n = u_0 + nr$ est lié à la fonction affine $f(x) = ax + b$, avec $a = r$ et $b = u_0$.
On parle alors de croissance ou décroissance linéaire (ou affine).

3) Représentation graphique d'une suite arithmétique :

n	u_n
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17
9	19
10	21



Ci-contre est représentée la courbe représentative de la suite définie par : $u_n = 2n + 1$ qui est comme nous l'avons démontré plus haut une suite arithmétique.

Nous remarquons que la représentation de cette suite est une droite. Ce qui est logique puisque sa forme explicite est une équation de droite. Nous admettrons qu'il en est de même pour toutes les suites arithmétiques.

De plus le coefficient directeur de cette droite est la raison de la suite.

Méthode déterminer l'expression d'une suite arithmétique à partir de sa représentation graphique :
On sait que toutes les suites arithmétiques s'écrivent sous la forme $u_n = r \times n + b$. Il faut donc trouver les valeurs de r et de b.
Or on sait que $r = u_{n+1} - u_n$, donc il suffit de lire les valeurs de deux termes successifs et de les soustraire pour obtenir r.
Si on lit graphiquement u_0 on trouve directement la valeur de b.

II / Suites géométriques :

1) Définition et formules :

Définition :
Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a :
$u_{n+1} = r \times u_n$ (relation de récurrence)
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.
Exemples :
Exemple 1 :
Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 5$ $u_1 = 10$ $u_2 = 20$ $u_3 = 40$.
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

Exemple 2 :
On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 4%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

Formules explicites

Soit (u_n) une suite géométrique de raison *r* et de premier terme u_0.

- Pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = u_0 \times r^n$
- Pour tout entier naturel *n* et *p*, on a : $u_n = u_p \times r^{n-p}$

Méthode : Démontrer qu'une suite est géométrique :
Si l'on dispose des premiers termes il faudra calculer la division des termes successifs. Si le résultat de cette division est constant alors la suite est géométrique et la raison est le résultat de la division.

Si l'on dispose d'une formule il faut faire le calcul : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si le résultat de ce calcul est un nombre constant alors la suite est géométrique et sa raison est le nombre trouvé dans le calcul précédent.

Exemple :
Soit la suite définie par $u_n = 2^n$, démontrer que cette suite est géométrique. Avant de se lancer dans la démonstration vérifions si l'affirmation est cohérente en calculant u_0, u_1 et u_2.
$u_0 = 1$ $u_1 = 2$ $u_2 = 4$
Vérifions que $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = 2$. Le rapport de deux termes successifs est constant donc on peut supposer que cette suite est géométrique.
Démonstration :
Expression de $u_{n+1} = 2^{n+1}$
Calcul de $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$
Le rapport de deux termes successifs est constant et égal à 2. Donc cette suite est géométrique de raison 2.

2) Variations :

Propriété :
Soit *r* un réel non nul.

Et $u_0 > 0$
- Si $r > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < r < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Et $u_0 < 0$
- Si $r > 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $0 < r < 1$, alors la suite (u_n) est croissante.

- Si $r = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

On parle de croissance ou décroissance exponentielle.

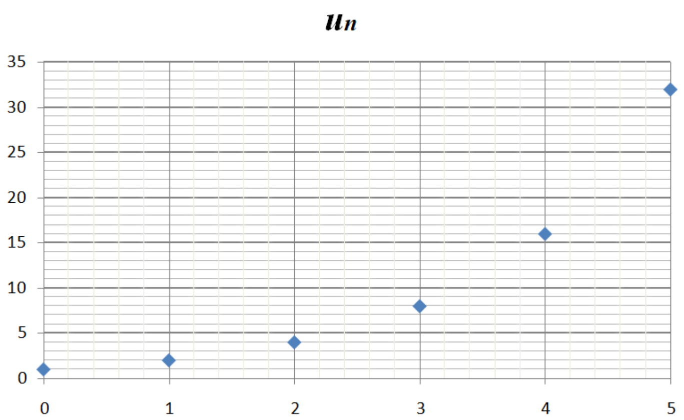
Exemple :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme $u_0 = -5$.

Alors pour tout entier *n*, on a $u_n = -5 \times 1{,}2^n$.

On sait que $u_0 < 0$ et que r > 1 donc (u_n) est décroissante.

3) Représentation graphique d'une suite géométrique.

n	u_n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32



Ci-contre nous avons représenté la suite définie par : $u_n = 2^n$. On remarque que ses points ne sont pas alignés. Cependant si on détermine graphiquement deux valeurs successives de un et qu'on en calcule le rapport on obtiendra toujours le même nombre, la raison de cette suite.

III/ Somme des termes d'une suite.

1) Suite arithmétique :

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique se calcule de la manière suivante :

$$S = nombre\ de\ terme\ \times \frac{premier\ terme + dernier\ terme}{2}$$

Il faudra bien attention lors du comptage du nombre de termes.

Notation :

Pour être rigoureux mathématiquement, on note de la manière suivante la somme des n premiers termes d'une suite :

$$\sum_{n=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Cette notation signifie simplement qu'on additionne les n premiers termes de la suite.
Attention cette formule n'est valable que si la suite commence à u_0.

Exemple :

Soit la suite arithmétique de terme initial 2 et de raison 4. Calculer la somme des termes jusqu'à u_{10} premiers termes :
Le premier terme est donc 1 le dernier se calcul à l'aide de la forme explicite donc :
$u_{10} = u_0 + 10 \times 4 = 42$

$$\sum_{n=0}^{n=10} u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = (10+1) \times \frac{u_1 + u_{10}}{2} = 11 \times \frac{2+42}{2} = 242$$

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique se calcule de la manière suivante :

$$S = premier\ terme\ \times \frac{1 - q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$$

2) Suite géométrique :

Notation :

Pour être rigoureux mathématiquement, on note de la manière suivante la somme des n premiers termes d'une suite :

$$\sum_{n=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

Cette notation signifie simplement qu'on additionne les n premiers termes de la suite.
Attention cette formule n'est valable que si la suite commence à u_0.

Exemple :

Soit la suite géométrique définie par $u_0 = 10$ et $q = 2$. Calculer la somme des neuf premiers termes.

$$S = 10 \times \frac{1 - 2^{9+1}}{1-2} = 10\ 230$$