3. Zusammengesetzte e- und ln-Funktionen

Betrachtet wird die verkettete Funktion $f: x \longmapsto u(v(x))$ mit $u(x) = \ln(x)$ und $v(x) = 6x^2$.

Nach den Logarithmusgesetzen gilt nun

$$f(x) = u(v(x)) = \ln(6x^2) = \ln(6) + \ln(x^2) = \ln(6) + 2 \cdot \ln(x),$$

woraus folgt, dass $\quad f'(x) = 0 + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

Die Ableitung ist jedoch auch direkt über die Kettenregel möglich, weshalb folgen muss

$$f'(x) \overset{KR}{=} u'(v(x)) \cdot v'(x) = u'(v(x)) \cdot 12x \overset{!}{=} \frac{2}{x} \quad \Big| : 12x$$

$$\Rightarrow u'(v(x)) = \frac{2}{12x \cdot x} = \frac{1}{6x^2} = \frac{1}{v(x)}$$

MERKE

Ist $v: x \longmapsto v(x)$ eine <u>differenzierbare Funktion</u>, so lassen sich die Verkettungen $f: x \longmapsto e^{v(x)}$ und $g: x \longmapsto \ln(v(x))$ mit der Kettenregel ableiten:

$$f(x) = e^{v(x)} \longrightarrow f'(x) = v'(x) \cdot e^{v(x)}$$

$$g(x) = \ln(v(x)) \longrightarrow f'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$$

Da die e-Funktion schneller und die ln-Funktion langsamer als jede Potenzfunktion $p: x \longmapsto x^r$ mit $r \in \mathbb{N}$ wächst, werden folgende Grenzwerte festgelegt:

MERKE

Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^r}{e^x} = 0^+ \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} (e^x - x^r) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} (x^r \cdot \ln(x)) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0$$