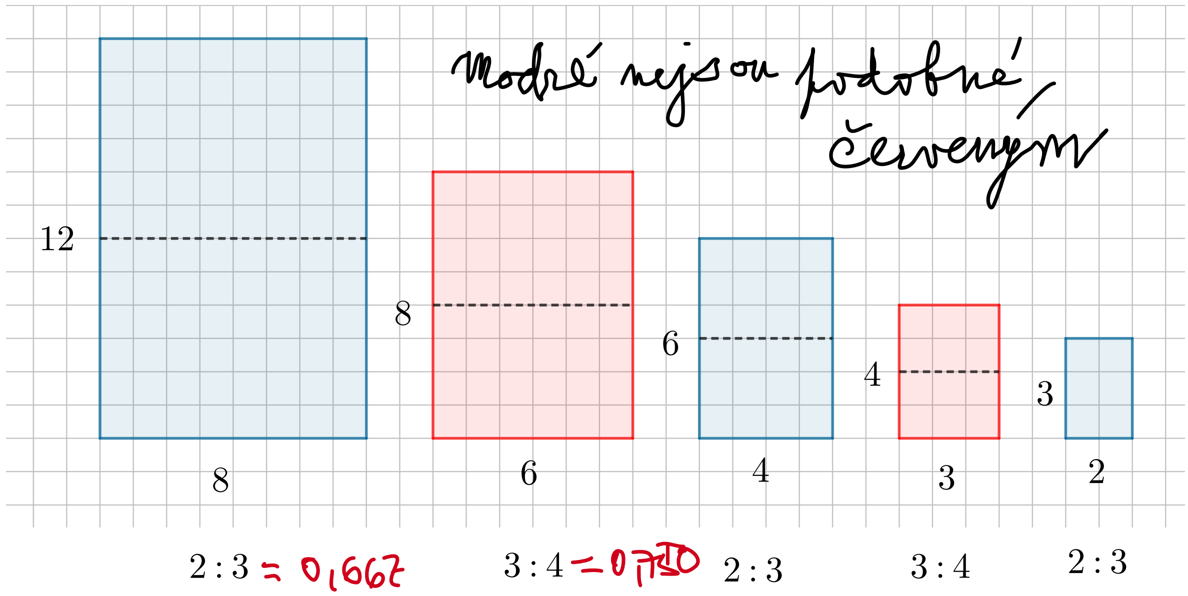
Tajemství Á,Bé,Cé a Dé čtverky

1. Zámyš

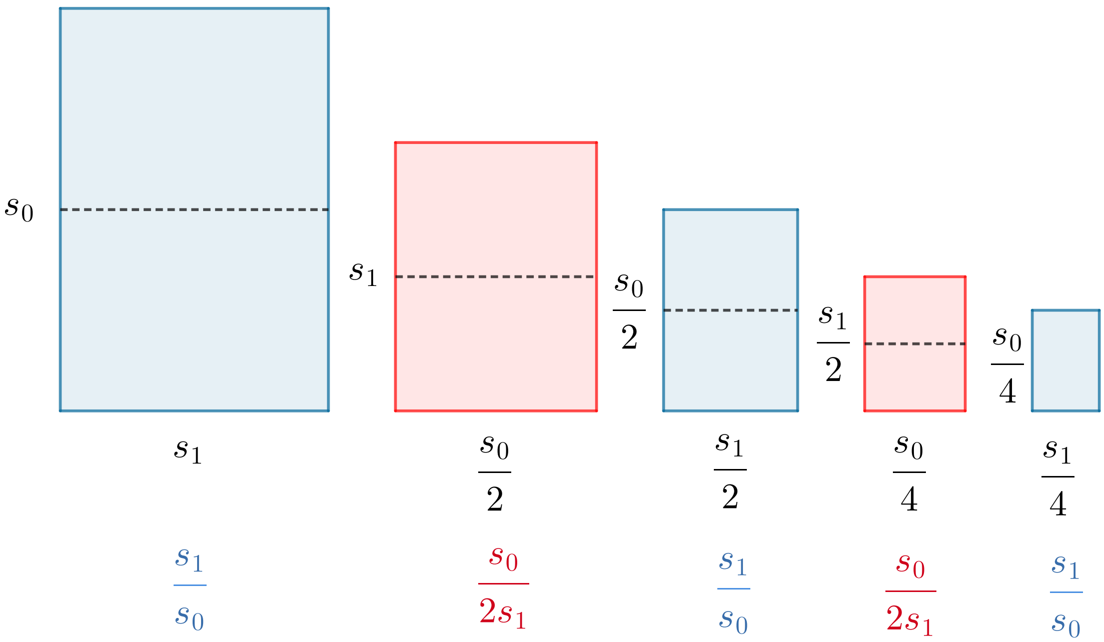
Základní myšlenka je tato - chci najít takový poměr stran obdélníkového papíru, aby se **poměr jeho stran opakovaným půlením větší strany zachovával**.

Rozměry prvního obdélníku nemůžeme volit libovolně. Například z obdélníku o stranách 3×2, který má poměr menší strany ku větší $2:3 \;=\; 0,666\ldots$, dostaneme rozpůlením větší strany obdélník $2 \times 1,5$, který má poměr menší strany ku větší $1,5:2 \;=\; 3:4 = 0,75$. Dalším půlením dostáváme dva typy obdélníků (modrý a červený) a střídají se poměry $2:3$ a $3:4$.

Když bychom chtěli poměry červených obdélníků upravit na poměry modrých, museli bychom vzít nůžky a kratší strany trochu zkrátit. (Červené jsou evidentně moc široké.)



Vezměme to obecně. Označme u prvního obdélníku delší stranu s_0 a kratší s_1.



Vidíme, že se střídají dva poměry $\frac{s_1}{s_0}$ a $\frac{s_0}{2s_1}$. Chceme-li tedy, aby modré a červené obdélníky byly podobné, musí se tyto dva poměry rovnat.

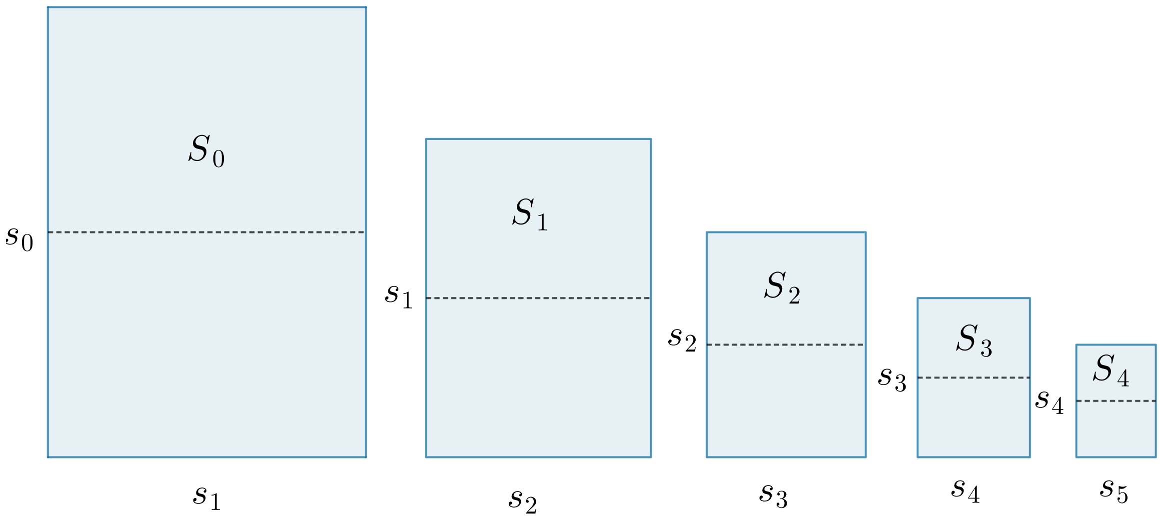
$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{s_0}{2s_1}$$

Odtud dostáváme po úpravě

$$\boxed{\frac{s_1}{s_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} \doteq 0,707} \tag{1}$$

Jinými slovy kratší strana musí být $\sqrt{2} \times$ kratší než strana delší. (Tak jako strana čtverce je $\sqrt{2} \times$ kratší než jeho úhlopříčka, nebo efektivní hodnota střídavého napětí je $\sqrt{2} \times$ menší než hodnota maximální.)

Dostáváme posloupnost obdélníků, které jsou si všechny podobné jako vejce vejci, každý následující obdélník má poloviční obsah než ten předcházející a poměr menší strany ku větší je vždy $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{s_2}{s_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{s_3}{s_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{s_4}{s_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{s_5}{s_4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Máme tedy 3 geometrické posloupnosti:

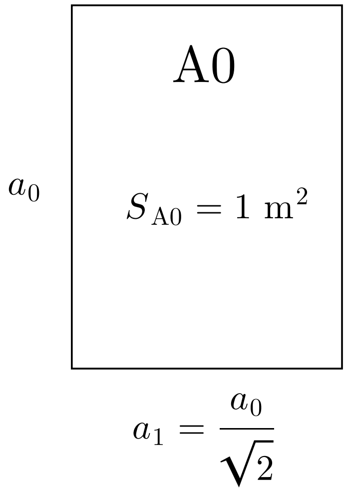
- posloupnost **obsahů** $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 \ldots$ s kvocíkem $\dfrac{1}{2}$
- posloupnost **delších** stran $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots$ s kvocíkem $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- posloupnost **kratších** stran $s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots$ s kvocíkem $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Jediné, co je potřeba, je určit **první člen posloupnosti delších stran** s_0 a tím jsou všechny tři posloupnosti jednoznačně dány. Existují tři **řady** formátů, které se liší ve volbě členu s_0.

2. Řada A

Základní formát řady A se označuje jako A0.

Rozměry formátu A0 jsou definovány požadavkem, aby obsah papíru byl 1 m^2.



Snadno zjistíme jeho rozměry. Strany papíru A0 označíme a_0 a a_1. Dle (1) je $a_1 = \dfrac{a_0}{\sqrt{2}}$ a přitom má platit:

$$S_0 = a_0 \cdot a_1 = 1 \text{ m}^2 \tag{2}$$

Tedy:

$$\begin{aligned} a_0 \cdot \frac{a_0}{\sqrt{2}} &= 1 \\ a_0^2 &= \sqrt{2} \\ a_0 &= \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

A vzhledem k (2) máme hned

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 2^{-\frac{1}{4}}$$

Nebo můžeme spočítat

$$a_1 = \frac{a_0}{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Základní formát A0 má tedy v **metrech** rozměry

$$\boxed{\mathrm{A0}:\ \sqrt[4]{2}\times\frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 2^{\frac{1}{4}}\times 2^{-\frac{1}{4}}} \tag{3}$$

Další formáty vzniklé půlením A0 označujeme A1, A2, A3, A4 ... Číslo za písmenem A značí, kolikrát jsme půlili. Takže například A4 vzniklo tím, že jsme $4\times$ půlili A0. Pro obsah formátu A4 tedy platí

$$S_{\mathrm{A4}} = \frac{S_0}{2^4} = \frac{1}{16}\ \mathrm{m}^2$$

Obecně tedy platí

$$\boxed{S_{\mathrm{A}n} = \frac{1}{2^n}} \tag{4}$$

Posloupnost a_0, a_1, a_2, a_3 ... delších stran řady A v metrech vypadá takto (kvocík je $q = 2^{-\frac{1}{2}}$):

$$\begin{aligned} a_0 &= 2^{\frac{1}{4}} \\ a_1 &= a_0 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{4}} \\ a_2 &= a_1 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{3}{4}} \\ a_3 &= a_2 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{5}{4}} \\ &\vdots \\ a_n &= 2^{\frac{1-2n}{4}} \end{aligned} \tag{5}$$

Posloupnost kratších stran je stejná, jen začíná členem a_1.

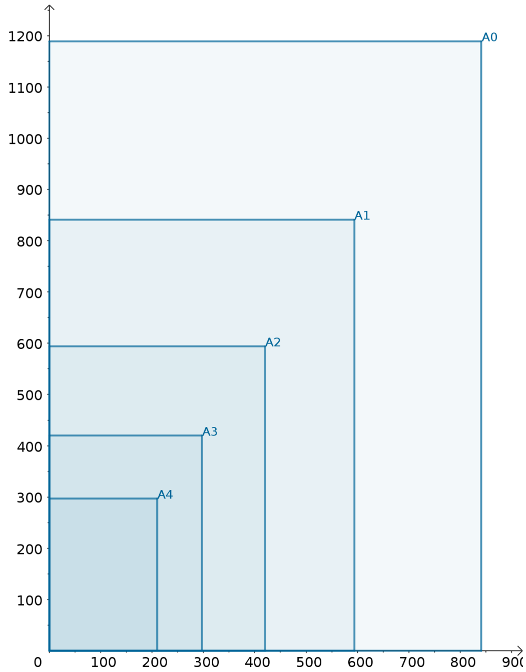


Figure 1: A0 je definován obsahem 1m^2

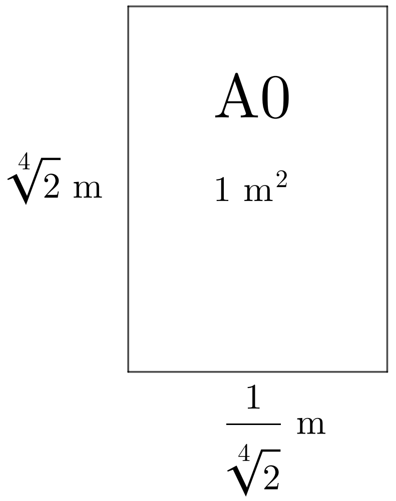
2.1. Zaokrouhlené hodnoty v milimetrech

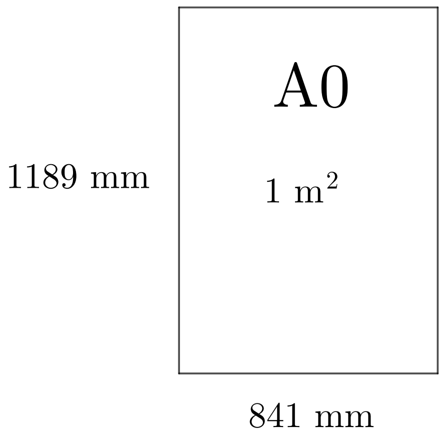
Základní formát A0 má v **milimetrech** rozměry

$$\left(\sqrt[4]{2} \times \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \cdot 1000 = 1189,207\ldots \times 840,896\ldots$$

Bohužel $\sqrt{2}$ je iracionální, takže **musíme zaokrouhlit.** Po (běžném) zaokrouhlení na **milimetry** je to

$$\boxed{\text{A0}:\ 1189 \times 841} \tag{6}$$



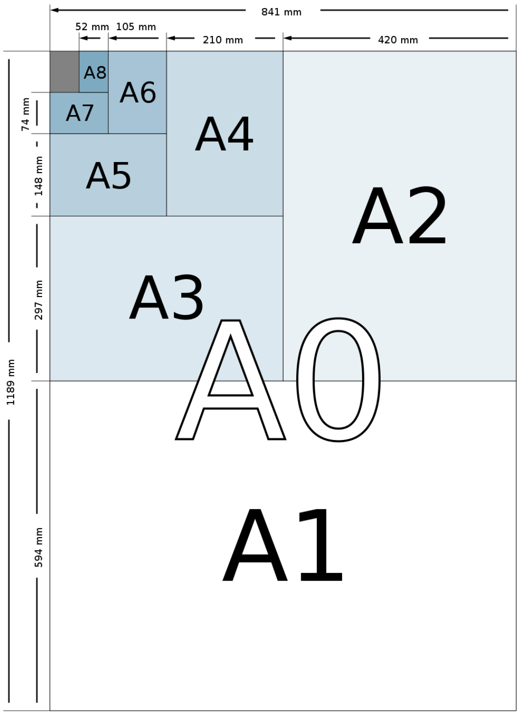


Výpočet dalších hodnot se dělá **půlením delší strany**.
Nyní se zaokrouhluje **dolů**, na nejbližší milimetr (dolní celá část), neboť při řezání papíru není možný velikostní přebytek (takže např. $594,5 \doteq 594$ nebo $148,625 \doteq 148$).

A0	1189	841	1189	841
A1	841	$\frac{1189}{2} = 594,5$	841	594
A2	594,5	$\frac{841}{2} = 420,5$	594	420
A3	420,5	$\frac{594,5}{2} = 297,25$	420	297
A4	297,25	$\frac{297,25}{2} = 210,25$	297	210
A5	210,25	$\frac{210,25}{2} = 148,625$	210	148
A6	148,625	$\frac{148,625}{2} = 105,125$	148	105
A7	105,125	$\frac{105,125}{2} = 74,3125$	105	74

A8	74,3125	$\frac{74,3125}{2} = 52,5625$	74	52
A9	52,5625	$\frac{52,5625}{2} = 37,15625$	52	37
A10	37,15625	$\frac{37,15625}{2} = 26,28125$	37	26

Table 1: Normou ISO 216 stanovené rozměry řady A (modře)



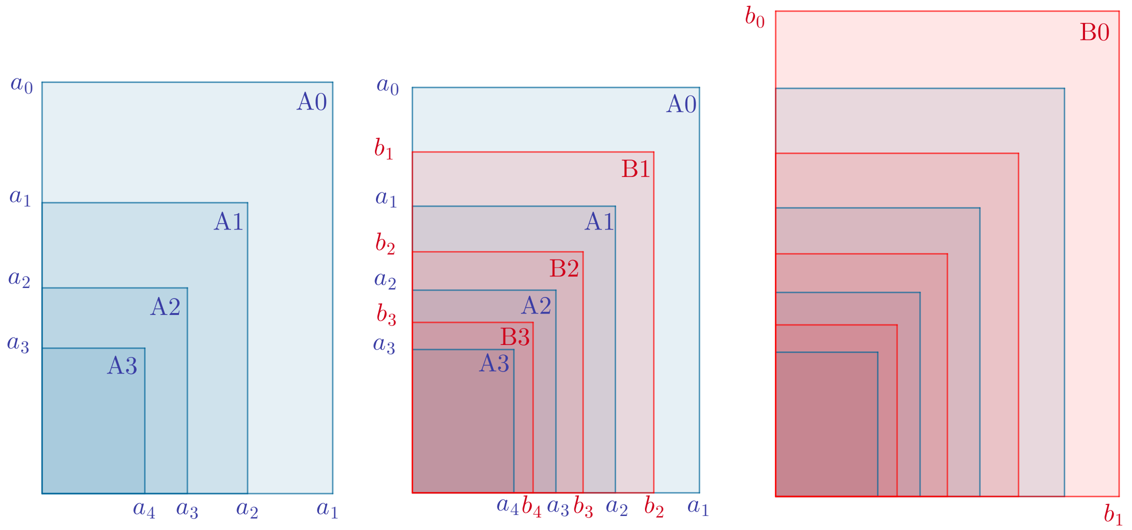
2.2. Použití řady A:

- A0, A1 - plakáty, mapy a technické plány,
- A1, A2 - kalendáře, flipcharty, balicí papír,
- A2, A3 - diagramy, mapy a kresby,
- A4 - běžný tisk, kancelářské využití, časopisy, školní sešity na mathematiku
- A5 - školní sešity na fysiku,
- A6 - pohlednice, poznámkové bloky, slovníčky na jazyky.

3. Řada B

Řada A je pro určité účely **moc řídká** a bylo by dobré vložit vždy mezi dva formáty řady A další formát. Mezi A0 a A1 vložíme B1, mezi A1 a A2 vložíme

B2 atd. Nakonec ještě dopočítáme B0. Tím vznikne řada B (viz obr. níže).



Řada A je moc řídká. Vložíme B1, B2, B3 ... Dopočítáme B0.

Chceme samozřejmě, stejně jako u řady A, aby rozměry řady B byly geometrickou posloupností s kvocíkem $q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Začneme vložením B1 mezi A0 a B1. Asi bude rozumné požadovat, aby platilo, že kolikrát je obsah papíru B1 menší než A0, tolikrát je obsah A1 menší než B1:

$$\frac{S_{\mathrm{B1}}}{S_{\mathrm{A0}}} = \frac{S_{A1}}{S_{B1}}$$

Tedy

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{B1}}^2 &= S_{\mathrm{A0}} \cdot S_{A1} \\ S_{\mathrm{B1}} &= \sqrt{S_{\mathrm{A0}} \cdot S_{A1}} \end{aligned} \tag{7}$$

To jinými slovy znamená, že:

Formát B1 je definován požadavkem, aby jeho obsah byl geometrickým průměrem obsahů A0 a A1.

Neboli obsahy $S_{\mathrm{A0}}, S_{\mathrm{B1}}, S_{\mathrm{A1}}$ mají tvořit geometrickou posloupnost.
Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} b_1 b_2 &= \sqrt{a_0 a_1 \cdot a_1 a_2} \\ b_1 b_2 &= a_1 \sqrt{a_0 a_2} \end{aligned}$$

Víme, že platí $b_2 = b_1 q,\ \ a_1 = a_0 q,\ \ a_2 = a_0 q^2$, tedy

$$b_1^2 q = a_0 q \sqrt{a_0^2 q^2}$$

$$b_1^2 q = a_0^2 q^2$$

Odtud dostáváme

$$b_1 = a_0\sqrt{q} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}} = 1 \tag{8}$$

Podobnou úvahou dostáváme pro další členy vložené posloupnosti $b_1, b_2, b_3, \dots$ vztahy

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1\sqrt{q} = a_0 q\sqrt{q} = q = 2^{-\frac{1}{2}} \\ b_3 &= a_2\sqrt{q} = a_0 q^2\sqrt{q} = q^2 = 2^{-\frac{2}{2}} \\ b_4 &= a_3\sqrt{q} = a_0 q^3\sqrt{q} = q^3 = 2^{-\frac{3}{2}} \\ &\vdots \\ b_n &= a_{n-1}\sqrt{q} = a_0 q^{n-1}\sqrt{q} = q^{n-1} = 2^{-\frac{n-1}{2}} \end{aligned} \tag{9}$$

Vidíme, že podíl dvou po sobě jdoucích stran řady B je stejný jako podíl dvou po sobě jdoucích stran řady A, (např. $\frac{b_4}{b_3} = \frac{a_3}{a_2} = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$) tedy $\frac{1}{\sqrt{2}}$, což jsme na začátku požadovali.

Všimněme si, že požadavek, aby **obsah** formátu B byl geometrickým průměrem sousedních formátů A, vede k tomu, že také **strana formátu B je geometrickým průměrem sousedních stran A**. Dle (9) je totiž

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_n\sqrt{q} \\ &= \sqrt{a_n^2 q} \\ &= \sqrt{a_n \cdot a_n q} \\ &= \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}} \end{aligned}$$

Tedy b_{n+1} je vskutku geometrickým průměrem sousedních členů posloupnosti stran formátu A. To ale znamená, že kombinovaná posloupnost

$$b_0, a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, b_3, a_3 \dots$$

je **geometrická** s kvocíkem $\frac{b_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n\sqrt{q}}{a_n}$, tedy

$$\boxed{q' = \sqrt{q} = 2^{-\frac{1}{4}}} \tag{10}$$

Dle (8) máme pro stranu b_1 hodnotu v metrech:

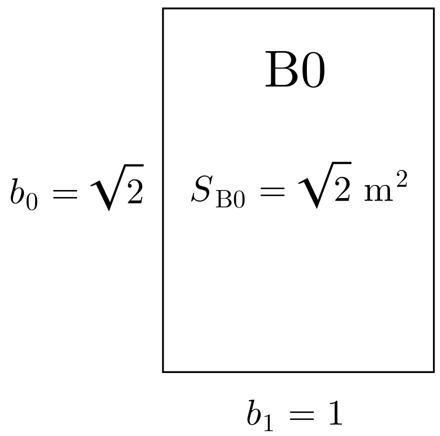
$$b_1 = 1 \text{ m}$$

Dopočítáme stranu b_0 (ta je $\sqrt{2} \times$ delší než b_1):

$$b_0 = \sqrt{2} \text{ m}$$

Základní formát B0 má tedy v **metrech** rozměry

$$\boxed{\mathrm{B0}: \ \sqrt{2} \times 1} \tag{11}$$



Obsah papíru B0 je tedy $S_{\mathrm{B0}} = \sqrt{2} \text{ m}^2$.

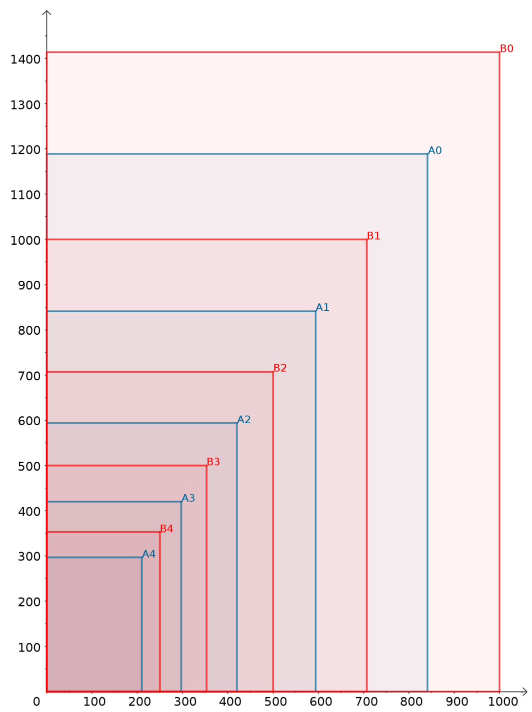


Figure 2: B1 je definován jako GP mezi A1 a A0

3.1. Zaokrouhlené hodnoty v milimetrech

Základní formát B0 má v **milimetrech** rozměry

$$\left(\sqrt{2} \times 1\right) \cdot 1000 = 1414,223\ldots \times 1000$$

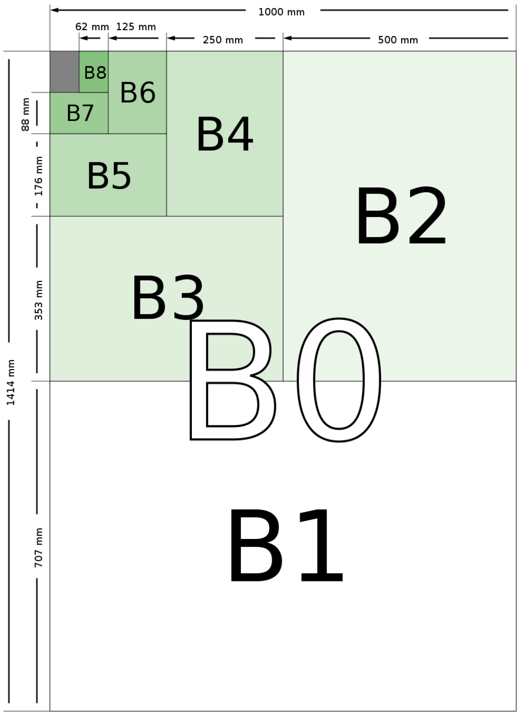
Po (běžném) zaokrouhlení na **milimetry** je to

$$\boxed{\text{B0}: \ 1414 \times 1000 \qquad (12)}$$

Výpočet dalších hodnot se dělá **půlením delší strany**.
Opět se nyní zaokrouhluje **dolů**, na nejbližší milimetr (dolní celá část).

B0	1414	1000	1414	1000
B1	1000	707	1000	707
B2	707	500	707	500
B3	500	353,5	500	353
B4	353,5	250	353	250
B5	250	176,5	250	176
B6	176,5	125	176	125
B7	125	88,375	125	88
B8	88,375	62,5	88	62
B9	62,5	44,1875	62	44
B10	44,1875	31,25	44	31

Table 2: Normou ISO 216 stanovené rozměry řady B (modře)



3.2. Použití řady B:

Ačkoli se řada B používá v kancelářích méně často, používá se pro různé aplikace, kde by jedna velikost řady A byla příliš malá, ale další velikost řady A je příliš velká, nebo protože je vhodná pro určitý účel.

- A4 je poměrně běžná u tištěných notových zápisů.
- B5 je poměrně častou volbou pro knihy.
- **B7 odpovídá pasové velikosti** ID-3 z normy ISO/IEC 7810.
- Mnoho plakátů používá papír řady B nebo jeho **přibližnou** podobu, například 700×500 mm je skoro B2

	a_n	a_{n+1}	$S_{\mathrm{A}n}$		b_n	b_{n+1}	$S_{\mathrm{B}n}$
A0	$\sqrt[4]{2}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	1	B0	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
A1	$2^{-\frac{1}{4}}$	$2^{-\frac{3}{4}}$	$\frac{1}{2}$	B1	1	$2^{-\frac{1}{2}}$	$2^{-\frac{1}{2}}$

A2	$2^{-\frac{3}{4}}$	$2^{-\frac{5}{4}}$	$\frac{1}{2^2}$	B2	$2^{-\frac{1}{2}}$	$2^{-\frac{2}{2}}$	$2^{-\frac{3}{2}}$
A3	$2^{-\frac{5}{4}}$	$2^{-\frac{7}{4}}$	$\frac{1}{2^3}$	B3	$2^{-\frac{2}{2}}$	$2^{-\frac{3}{2}}$	$2^{-\frac{5}{2}}$
A4	$2^{-\frac{7}{4}}$	$2^{-\frac{9}{4}}$	$\frac{1}{2^4}$	B4	$2^{-\frac{3}{2}}$	$2^{-\frac{4}{2}}$	$2^{-\frac{7}{2}}$
A5	$2^{-\frac{9}{4}}$	$2^{-\frac{11}{4}}$	$\frac{1}{2^5}$	B5	$2^{-\frac{4}{2}}$	$2^{-\frac{5}{2}}$	$2^{-\frac{9}{2}}$
A6	$2^{-\frac{11}{4}}$	$2^{-\frac{13}{4}}$	$\frac{1}{2^6}$	B6	$2^{-\frac{5}{2}}$	$2^{-\frac{6}{2}}$	$2^{-\frac{11}{2}}$
A7	$2^{-\frac{13}{4}}$	$2^{-\frac{15}{4}}$	$\frac{1}{2^7}$	B7	$2^{-\frac{6}{2}}$	$2^{-\frac{7}{2}}$	$2^{-\frac{13}{2}}$
A8	$2^{-\frac{15}{4}}$	$2^{-\frac{17}{4}}$	$\frac{1}{2^8}$	B8	$2^{-\frac{7}{2}}$	$2^{-\frac{8}{2}}$	$2^{-\frac{15}{2}}$
A9	$2^{-\frac{17}{4}}$	$2^{-\frac{19}{4}}$	$\frac{1}{2^9}$	B9	$2^{-\frac{8}{2}}$	$2^{-\frac{9}{2}}$	$2^{-\frac{17}{2}}$
A10	$2^{-\frac{19}{4}}$	$2^{-\frac{21}{4}}$	$\frac{1}{2^{10}}$	B10	$2^{-\frac{9}{2}}$	$2^{-\frac{10}{2}}$	$2^{-\frac{19}{2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
An	$2^{-\frac{2n-1}{4}}$	$2^{-\frac{2n+1}{4}}$	$\frac{1}{2^n}$	Bn	$2^{-\frac{n-1}{2}}$	$2^{-\frac{n}{2}}$	$2^{-\frac{2n-1}{2}}$

Table 3: Srovnání řad A a B

4. Řada C

Formát C0 je definován požadavkem, aby jeho obsah byl geometrickým průměrem obsahů A0 a B0.

Tedy v metrech čtverečních:

$$S_{\mathrm{C0}} = \sqrt{S_{\mathrm{A0}} \cdot S_{\mathrm{B0}}} = \sqrt{1 \cdot \sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$$

Současně platí

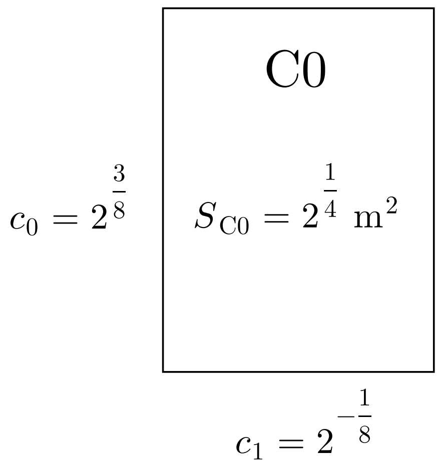
$$S_{\mathrm{C0}} = c_0 c_1 = c_0 c_0 q = c_0^2 2^{-\frac{1}{2}}$$

Odtud

$$\begin{aligned} c_0^2 2^{-\frac{1}{2}} &= 2^{\frac{1}{4}} \\ c_0^2 &= 2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} \\ c_0 &= 2^{\frac{3}{8}} \end{aligned}$$

A pro c_1 dostáváme $c_1 = c_0 q = 2^{\frac{3}{8}} 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{8}}$.
Základní formát C0 má tedy v **metrech** rozměry

$$\boxed{\mathrm{C0:}\ 2^{\frac{3}{8}} \times 2^{-\frac{1}{8}}} \tag{13}$$



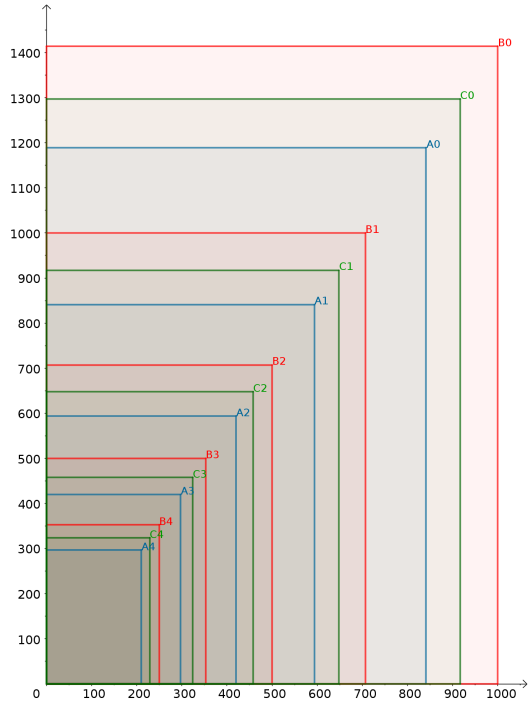


Figure 3: C0 je definován jako GP mezi A0 a B0

4.1. Zaokrouhlené hodnoty v milimetrech

Základní formát C0 má v **milimetrech** rozměry

$$\left(2^{\frac{3}{8}} \times 2^{-\frac{1}{8}}\right) \cdot 1000 = 1296,839\ldots \times 917,004\ldots$$

Po (běžném) zaokrouhlení na **milimetry** je to

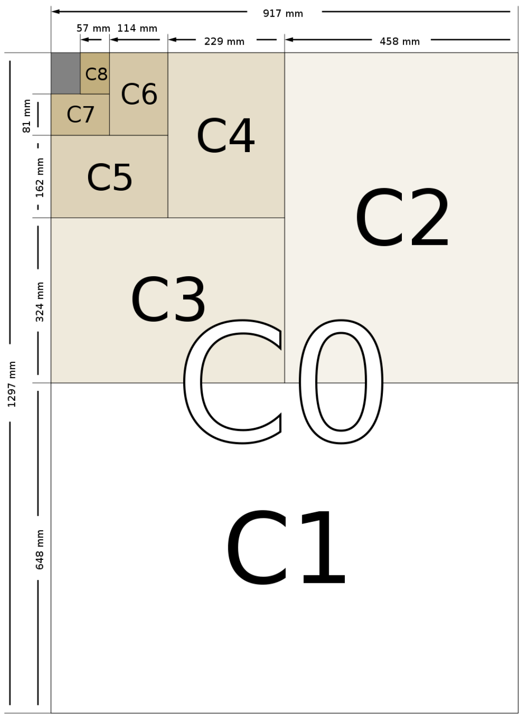
$$\boxed{\mathrm{C0}:\ 1297 \times 917} \tag{14}$$

Výpočet dalších hodnot se dělá **půlením delší strany**.
Opět se nyní zaokrouhluje **dolů**, na nejbližší milimetr (dolní celá část).

C0	1297	917	1297	917
C1	917	648,5	917	648
C2	648,5	458,5	648	458
C3	458,5	324,25	458	324

C4	324,25	229,25	324	229
C5	229,25	162,125	229	162
C6	162,125	114,625	162	114
C7	114,625	81,0625	114	81
C8	81,0625	57,3125	81	57
C9	57,3125	40,53125	57	40
C10	40,53125	28,265625	40	28

Table 4: Normou ISO 216 stanovené rozměry řady C (modře)



4.2. Použití řady C:

Formáty řady C se používají hlavně pro **obálky**, neboť jsou vždy o něco málo větší než odpovídající formát řady A (např. papír formátu A4 se vejde do obálky formátu C4).

5. Řada D

Když se jukneme na obrázek Figure 3, tak vidíme, že mezi A0 a B1 (a podobně mezi A1 a B2, A2 a B3 atd.) můžeme vložit další formát. Původní německá norma DIN 476 (r. 1922) proto definovala také řadu D.

Formát D0 je definován požadavkem, aby jeho obsah byl geometrickým průměrem obsahů A0 a B1 (resp. C0 a C1).

Tedy v metrech čtverečních:

$$S_{\mathrm{D0}} = \sqrt{S_{\mathrm{A0}} \cdot S_{\mathrm{B1}}} = \sqrt{1 \cdot 2^{-\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{4}}$$

Současně platí

$$S_{\mathrm{D0}} = d_0 d_1 = d_0 d_0 q = d_0^2 2^{-\frac{1}{2}}$$

Odtud

$$\begin{aligned} d_0^2 2^{-\frac{1}{2}} &= 2^{-\frac{1}{4}} \\ d_0^2 &= 2^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \\ d_0 &= 2^{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

A pro d_1 dostáváme $d_1 = d_0 q = 2^{\frac{1}{8}} 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{3}{8}}$.
Základní formát D0 má tedy v **metrech** rozměry

$$\mathrm{D0:}\ 2^{\frac{1}{8}} \times 2^{-\frac{3}{8}} \tag{15}$$

D0

$$d_0 = 2^{\frac{1}{8}} \qquad S_{\mathrm{D0}} = 2^{-\frac{1}{4}}\ \mathrm{m}^2$$

$$d_1 = 2^{-\frac{3}{8}}$$

5.1. Zaokrouhlené hodnoty v milimetrech

Základní formát D0 má v **milimetrech** rozměry

$$\left(2^{\frac{1}{8}} \times 2^{-\frac{3}{8}}\right) \cdot 1000 = 1090,507\ldots \times 771,105\ldots$$

Po (běžném) zaokrouhlení na **milimetry** je to

$$\mathrm{D0}:\ 1091 \times 771 \tag{16}$$

Výpočet dalších hodnot se dělá **půlením delší strany**.
Opět se nyní zaokrouhluje **dolů**, na nejbližší milimetr (dolní celá část).

D0	1091	771	1091	771
D1	771	545,5	771	545
D2	545,5	385,5	545	385
D3	385,5	272,75	385	272
D4	272,75	192.75	272	192
D5	192.75	136,375	192	136
D6	136,375	96,375	136	96
D7	96,375	68,1875	96	68

D8	68,1875	48,1875	68	48
D9	48,1875	34,09375	48	34
D10	34,09375	24,09375	34	24

Table 5: Normou DIN 476 (rok 1922) stanovené rozměry řady D (modře)

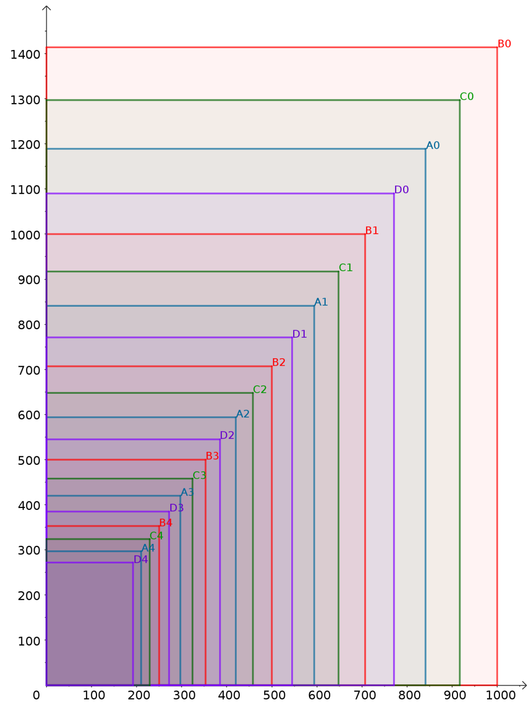


Figure 4: D0 je definován jako GP mezi B1 a A0
https://www.geogebra.org/m/ndkmaquw

6. Srovnání

$\boxed{\text{Kvocík pro strany: } 2^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}}$ $\boxed{\text{Kvocík pro obsahy: } 2^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}}$

B0: $b_0 = 2^{\frac{4}{8}}$, $2^{\frac{2}{4}}$ m^2, $b_1 = 2^{\frac{0}{8}}$

C0: $c_0 = 2^{\frac{3}{8}}$, $2^{\frac{1}{4}}$ m^2, $c_1 = 2^{-\frac{1}{8}}$

A0: $a_0 = 2^{\frac{2}{8}}$, $2^{\frac{0}{4}}$ m^2, $c_1 = 2^{-\frac{2}{8}}$

D0: $d_0 = 2^{\frac{1}{8}}$, $2^{-\frac{1}{4}}$ m^2, $d_1 = 2^{-\frac{3}{8}}$

7. Geometrická konstrukce A4-A5-B5-D4-C5

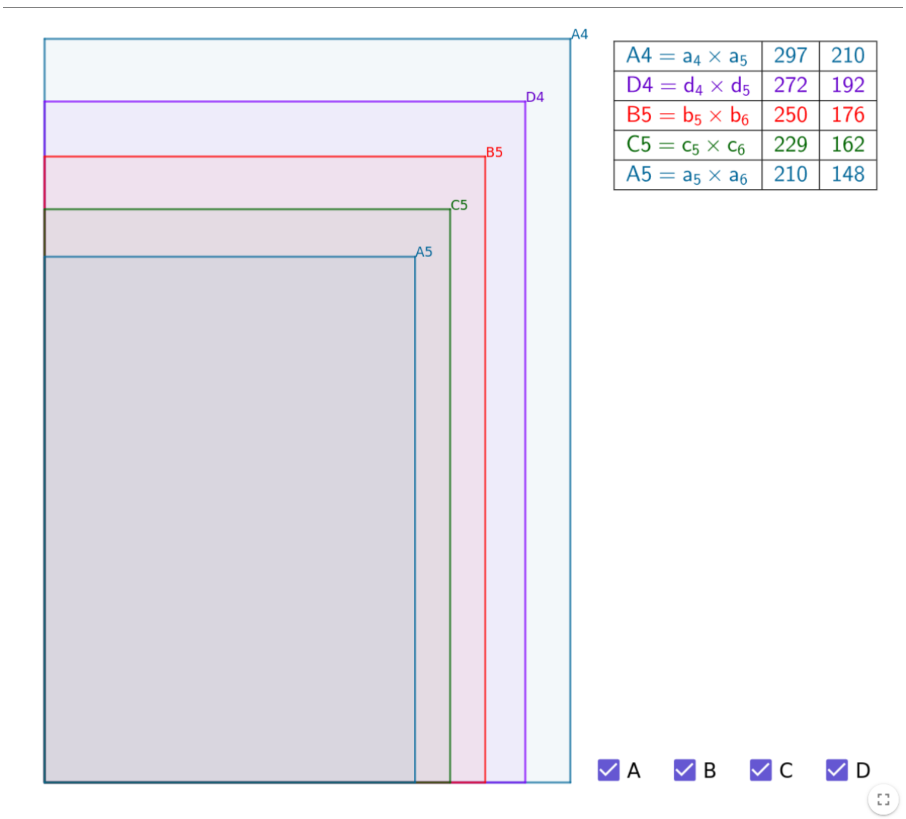


Figure 5: Od A4 do A5
https://www.geogebra.org/m/dywhbqzs

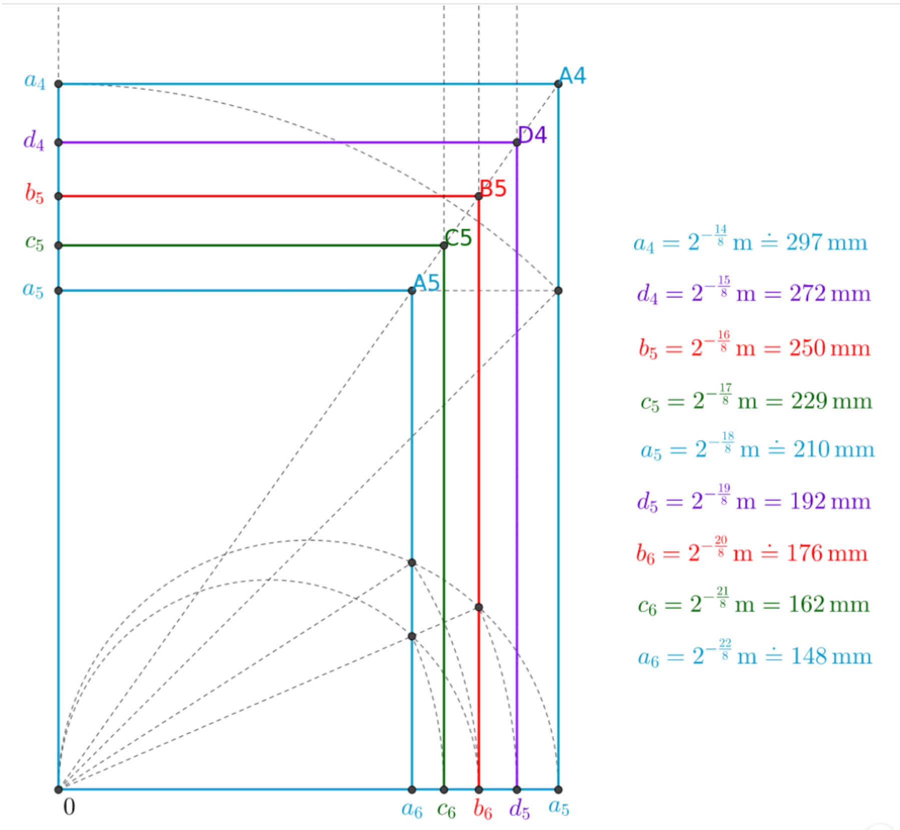


Figure 6: Konstrukce -- Eukleidova věta o odvěsně
https://www.geogebra.org/m/zj4q7eeg

8. Temperované ladění

$A_4 \to \underbrace{S_{A4}}_{f}$ $\quad A_5 \to S_{A5} = \underbrace{\frac{S_{A4}}{2}}_{f/2}$

$$S_{B5} = \sqrt{f \cdot f/2} = f\frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} f$$

$$S_{D4} = \sqrt{f \cdot f\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2^{-\frac{1}{4}} f$$

$$S_{C5} = \sqrt{2^{-\frac{1}{2}} f \cdot f \cdot 2^{-1}} = f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

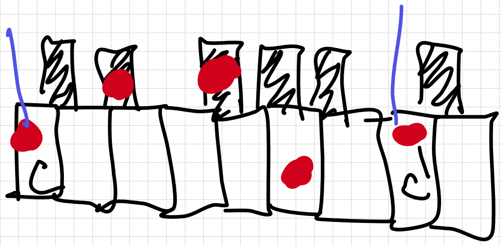
$$f,\ 2^{-\frac{1}{4}} f;\ 2^{-\frac{1}{2}} f;\ 2^{-\frac{3}{4}} f;\ \frac{f}{2} = f 2^{-1}$$

A4 D4 B5 C5

$$f \cdot 2^{0};\ f \cdot 2^{-\frac{1}{4}};\ f \cdot 2^{-\frac{2}{4}};\ f \cdot 2^{-\frac{3}{4}};\ f \cdot 2^{-1}$$

GP; $q = 2^{-\frac{1}{4}} = \boxed{2^{-\frac{3}{12}}}$ = 3 půltóny

$f/2 \sim A_5$ $\quad f \sim A_4$



C Dis Fis A = C Dim

http://www.skytarou.cz/akordy-stupnice.php?strana=prehled-hmatu&akord=Cd

9. Historie

Wikipedie: https://en.wikipedia.org/wiki/ISO_216
Nejstarší známá zmínka o výhodách stanovení velikosti papíru na základě poměru stran $1:\sqrt{2}$ se nachází v dopise německého vědce Georga Christopha Lichtenberga Johannu Beckmannovi z 25. října 1786.

Krátce po zavedení metrické soustavy bylo ve Francii vyvinuto několik nových formátů papíru (A2, A3, B3, B4 a B5 - Lazar Carnot - otec Sadi Carnota, zakladatele termodynamiky). Byly uvedeny v zákoně o zdanění publikací z roku 1798, který byl částečně založen na velikosti stránek.

V Německu na poč. 20. století začali hledat standardní systém formátů papíru na vědeckém základě. Šlo o to, aby nahradil širokou škálu jiných formátů papíru, jež se používaly dříve, aby se zlevnilo a zefektivnilo skladování papíru a rozmnožování dokumentů. Wilhelm Ostwald (1853-1932; baltský Němec, narozen v Rize; NC za chemii 1909) navrhl v roce 1911 formáty papíru založené na poměru $1:\sqrt{2}$, přičemž se odvolával na Lichtenbergův dopis z roku 1786 a propojil jej s metrickou soustavou pomocí **1 centimetru jako menší strany základního (nejmenšího) formátu**.

V roce 1918 Walter Porstmann publikoval článek, v němž argumentoval, že základem pro systém formátů papíru **nemůže být délka**, ale **povrch.** Navrhl, že **základní formát bude největší** (A0 a B0) a od nich se budou odvozovat formáty menší. **Formát A0 má mít obsah** 1 m^2 **a formát B0 má mít kratší stranu 1 m**.

Porstmann také tvrdil, že formáty pro obálky, by měly být o 10 % větší než samotný formát papíru.

V roce 1921, po dlouhé diskusi a další intervenci W. Porstmanna, vydal Normenausschuß der deutschen Industrie (NADI, "Normalizační výbor německého průmyslu", dnes Deutsches Institut für Normung nebo zkráceně DIN) německou normu DI Norm 476. Ta zavádí 4 série formátů papíru s poměrem $1:\sqrt{2}$ (A,B,C,D), přičemž série A je preferovaným formátem a je základem pro ostatní série.

Koncepce formátu papíru DIN byla brzy zavedena jako národní norma v mnoha dalších zemích.

V roce 1975 se stal mezinárodním standardem (ISO 216) a oficiálním formátem dokumentů OSN a dnes se používá téměř ve všech zemích světa s výjimkou USA, Kanady, Mexika, Peru, Kolumbie a Dominikánské republiky.

10. Výhody

Hlavní výhodou tohoto systému je jeho škálování. Obdélníkový papír s poměrem stran $1:\sqrt{2}$ má tu jedinečnou vlastnost, že po rozříznutí nebo přeložení na polovinu v polovině jeho delších stran má každá polovina stejný poměr stran $1:\sqrt{2}$ jako celý list před rozdělením. Podobně, položíme-li dva stejně velké listy papíru s poměrem stran $1:\sqrt{2}$ vedle sebe podél jejich delších stran, vytvoří větší obdélník s poměrem stran $1:\sqrt{2}$ a dvojnásobnou plochou.

Skládanou brožuru lze vyrobit tak, že se použije list nejbližší větší velikosti (například list A4 se přeloží na polovinu, aby vznikla brožura se stránkami velikosti A5). Kancelářský kopírovací stroj nebo tiskárna mohou být navrženy tak, aby zmenšily stránku z A4 na A5 nebo zvětšily stránku z A4 na A3. Podobně lze zmenšit dva listy A4 tak, aby se na ně vešel jeden list A4 bez přebytečného prázdného papíru.

Tento systém také zjednodušuje **výpočet hmotnosti** papíru. Podle normy ISO 536 je gramáž papíru definována jako hmotnost listu v gramech na plochu v metrech čtverečních. Gramáž jiných formátů lze odvodit dělením. Standardní list A4 vyrobený z papíru o gramáži 80 gm^{-2} váží 5 g, protože tvoří 1/16 stránky A0. Hmotnost a s ní spojenéu poštovné lze tedy snadno odhadnout spočítáním počtu použitých listů.

11. Odkazy

- Přednáška (John D Barrow) https://www.gresham.ac.uk/watch-now/uses-irrationality-paper-sizes-and-golden-ratio
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Form%C3%A1t_pap%C3%ADru
- https://en.wikipedia.org/wiki/ISO_216
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Georg_Christoph_Lichtenberg