# Problemas – Tema 9

# Problemas resueltos - 11 - posición relativa de recta y plano

**1. Dada la recta** $r:\begin{cases}4x-3y+4z=-1\\3x-2y+z=-3\end{cases}$ **y el plano** $\Pi: 2x-y+az=0$ **.**

**a) Calcular** $a$ **para que la recta y el plano sean paralelos.**

**b) Obtener un plano perpendicular a la recta que pase por el origen de coordenadas.**

a) Una recta y un plano son paralelos si el sistema formado por las dos ecuaciones generales de la recta y por la ecuación general del plano no tiene solución (ausencia de puntos de corte). La notación matricial de ese sistema será:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4 & -3 & 4 & -1\\3 & -2 & 1 & -3\\2 & -1 & a & 0\end{array}\right) \rightarrow det(A)=-8a-6-12-(-16-4-9a) \rightarrow det(A)=a+2$$

Si $det(A)=0 \rightarrow a=-2$

Discusión de casos:

- Si $a\neq -2 \rightarrow det(A)\neq 0 \rightarrow Rango(A)=3=Rango(A/C)=n^o\, incógnitas$ → Por el Teorema de Rouché Frobenius tendremos SCD con solución única.
- Si $a=-2 \rightarrow det(A)=0 \rightarrow Rango(A)\neq 3$ → Buscamos un menor de orden 2 no nulo → $\begin{vmatrix}4 & -3\\3 & -2\end{vmatrix}=-8+9=1\neq 0 \rightarrow Rango(A)=2$ → Estudiamos el rango de la matriz ampliada → Buscamos un menor de orden 3 no nulo en la ampliada → $\begin{vmatrix}-3 & 4 & -1\\-2 & 1 & -3\\-1 & -2 & 0\end{vmatrix}=0+12-4-(1+0-18)=25\neq 0 \rightarrow Rango(A/C)=3$ → Al no coincidir el rango de la matriz del sistema y el rango de la matriz ampliada tendremos SI sin solución → Recta y plano son paralelos.

b) Un plano perpendicular a una recta tendrá, como vector normal, el vector director de la recta. Por lo tanto, si pasamos la ecuación general de la recta a paramétrica, obtendremos su vector director.

$$r:\begin{cases}4x-3y+4z=-1\\3x-2y+z=-3\end{cases} \rightarrow z=\lambda \rightarrow \begin{cases}4x-3y=-1-4\lambda\\3x-2y=-3-\lambda\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-12x+9y=3+12\lambda\\12x-8y=-12-4\lambda\end{cases} \rightarrow$$

Sumamos ambas ecuaciones → $y=-9+8\lambda$ → Llevando este resultado a la primera ecuación del sistema → $4x-3(-9+8\lambda)=-1-4\lambda \rightarrow 4x+27-24\lambda=-1-4\lambda \rightarrow 4x=-28+20\lambda \rightarrow$ $x=-7+5\lambda$

La ecuación paramétrica queda → $r:\begin{cases} x=-7+5\lambda \\ y=-9+8\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ → Vector director $\vec{u}_r=(5,8,1)$

Este vector director será el vector normal del plano, por ser el plano perpendicular a la recta. Por lo tanto la ecuación general del plano resulta:

$$\Pi: 5x+8y+z+D=0$$

Si el plano pasa por el origen de coordenadas $(0,0,0)$ → $D=0$ → $\Pi: 5x+8y+z=0$

**2. a) Para qué valor del parámetro $a$ la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0\end{matrix}\right\}$ es perpendicular al plano $\Pi: -6x+ay+2z=0$ .**

**b) Demuestre que si $a=-8$ la recta $r$ corta al plano $\Pi$ en un punto. Calcular dicho punto de corte.**

a) La recta es perpendicular al plano si el vector director de la recta es proporcional al vector normal del plano.

$r:\left\{\begin{matrix} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0\end{matrix}\right\}$ → $z=\lambda$ → $\left\{\begin{matrix} x+y=1-\lambda \\ -x-2y=-\lambda\end{matrix}\right\}$ → Sumamos → $-y=1-2\lambda$ → $y=-1+2\lambda$ → Sustituyendo en la primera ecuación del sistema → $x+(-1+2\lambda)=1-\lambda$ → $x=2-3\lambda$

La ecuación paramétrica de la recta resulta → $r:\left\{\begin{matrix} x=2-3\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda\end{matrix}\right\}$ → Vector director $\vec{u}_r=(-3,2,1)$

El vector normal del plano $\Pi: -6x+ay+2z=0$ es → $\vec{u}_\Pi=(-6,a,2)$

Ambos vectores son proporcionales si se cumplen las siguientes igualdades resultantes de dividir sus respectivas componentes:

$$\frac{-3}{-6}=\frac{2}{a}=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad a=4$$

b) Si $a=-8$ el plano será $\Pi: -6x-8y+2z=0$ → Llevamos a la ecuación general del plano las coordenadas paramétricas de la recta. Si podemos despejar el parámetro libre de forma única, significará que recta y plano se cortan en un punto.

$$-6(2-3\lambda)-8(-1+2\lambda)+2(\lambda)=0 \quad \rightarrow \quad -12+18\lambda+8-16\lambda+2\lambda=0$$

$-4+4\lambda=0$ → $\lambda=1$ → Punto de corte $P(2-3,-1+2,1)=(-1,1,1)$

**3. Dados el plano** $\Pi : 2x - y = 2$ **y la recta** $r : \left\{ \begin{matrix} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{matrix} \right\}$ **se pide:**

**a) Estudiar la posición relativa de la recta y el plano.**

**b) Determinar el plano que contiene a la recta** $r$ **y es perpendicular a** $\Pi$ **.**

**c) Determinar la recta que pasa por** $A(-2, 1, 0)$ **, corta a** $r$ **y es paralela a** $\Pi$ **.**

a) Estudiamos la solución del sistema formado por la ecuación general del plano y las dos ecuaciones generales de la recta.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right)$$ → Vamos a aplicar Gauss por encima de la diagonal principal

$C_1 \longleftrightarrow C_2$ (al intercambiar columnas, cambian la posición de las incógnitas) → $\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right)$ →

$F_1' = F_1 - 2F_2 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right)$ → De $F_1 \rightarrow -y = 0 \rightarrow y = 0$

De $F_2 \rightarrow x = 1$

De $F_3 \rightarrow 0 - 2z = 2 \rightarrow z = -1$

Al tener el sistema solución única, recta y plano son secantes y se cortan en el punto $P(1, 0, -1)$ .

b) Buscamos un plano que contenga a $r$ y sea perpendicular a $\Pi$ .

Si contiene a $r$ , el vector director de la recta es paralelo al plano que buscamos. Si es perpendicular a $\Pi$ , el vector normal a $\Pi$ es paralelo al plano que buscamos.

Calculemos ambos vectores.

Si pasamos la ecuación general de la recta a paramétrica, podremos obtener un vector director.

$$r : \left\{ \begin{matrix} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{matrix} \right\} \rightarrow z = a \rightarrow r : \left\{ \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 + 2a \\ z = a \end{matrix} \right\} \rightarrow \vec{u}_r = (0, 2, 1)$$

De la ecuación general del plano obtenemos su vector normal.

$$\Pi : 2x - y = 2 \rightarrow \vec{u_\Pi} = (2, -1, 0)$$

Comprobamos que $\vec{u}_r=(0,2,1)$ y $\vec{u}_\Pi=(2,-1,0)$ no son proporcionales, ya que el cociente de sus componentes no lo son → $\frac{0}{2}\neq\frac{2}{-1}\neq\frac{1}{0}$

El punto $P(1,0,-1)$ obtenido en el apartado a) pertenecerá al plano que estamos buscando (al contener el plano a la recta).

Con dos vectores linealmente independientes y un punto del plano, podemos escribir la ecuación paramétrica del plano.

$$\Pi:\left\{\begin{matrix} x=1+2b \\ y=2a-b \\ z=-1+a \end{matrix}\right\}$$

c) Debemos determinar la recta que pasa por $A(-2,1,0)$ , corta a $r$ y es paralela a $\Pi$ . Llamaremos a la recta solución $s$ .

Si $s$ es paralela a $\Pi$ , significa que el vector director de $s$ es perpendicular al vector normal de $\Pi$ , por lo que $\vec{u}_s\cdot\vec{u}_\Pi=0$ .

Como razonamos en el apartado b) $\vec{u}_\Pi=(2,-1,0)$ .

El vector director de $s$ será el vector $\vec{AB}$ , donde $A(-2,1,0)$ y $B$ es un punto arbitrario de la recta $r$ , ya que ambas rectas se cortan según el enunciado. Por lo tanto, de la ecuación paramétrica de $r$ podemos sacar un punto arbitrario:

$$r:\left\{\begin{matrix} x=1 \\ y=2+2a \\ z=a \end{matrix}\right\} \rightarrow B=(1,2+2a,a) \rightarrow \vec{AB}=(3,1+2a,a) \rightarrow \vec{u}_s=\vec{AB}=(3,1+2a,a)$$

$$\vec{u}_s\cdot\vec{u}_\Pi=0 \rightarrow (3,1+2a,a)\cdot(2,-1,0)=0 \rightarrow 6-1-2a=0 \rightarrow a=\frac{5}{2} \rightarrow \vec{u}_s=(3,6,\frac{5}{2})$$

Si el vector director es $\vec{u}_s=(3,6,\frac{5}{2})$ y la recta pasa por $A(-2,1,0)$ , su ecuación paramétrica resulta:

$$s:\left\{\begin{matrix} x=-2+3\lambda \\ y=1+6\lambda \\ z=\frac{5}{2}\lambda \end{matrix}\right\}$$