Posloupnosti

Zlatonosná posloupnost a Binetův vzorec

Žán Pól Kastról

6. března 2022

1 Vzorec pro Fibonacciho zlatonosnou posloupnost

1.1 Fibonacciho posloupnost

Vímeť, že posloupnost může být zadána rekurentně (RVP – rekurentní vyjádření posloupnosti) nebo také vzorcem pro n-tý člen (VPN – vzorec pro n-tý člen). Řešili jsme příklady na přechod od VPN k RVP (to je snadné a řešitelné vždy) a naopak od RVP k VPN (to je těžší úloha, která ani nemusí mít řešení). V případě rekurentních vzorců jsme vlastně výhradně pracovali s případy, kdy následující člen je vyjádřen pouze pomocí členu bezprostředně předcházejícího (např. $a_{n+1} = 2a_n$ nebo $a_{n+1} = 2a_n + 3$ atd.)

Nyní se podíváme na případ, kdy následující člen bude vyjádřen pomocí *dvou* předcházejících. Jaký nejjednodušší rekurentní vztah nás asi napadne? No asi součet:

$$\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n} \tag{1}$$

Takovýchto posloupností je samozřejmě nekonečně mnoho, v závislosti na volbě prvních dvou členů. Například $a_1 = 2; \quad a_2 = 10$ bude generovat posloupnost

$$2, 10, 12, 22, 34, 56, \ldots$$

Nebo $a_1 = 1; \quad a_2 = \sqrt{2}$ bude generovat posloupnost

$$1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, 2 + 3\sqrt{2}, 3 + 5\sqrt{2}, \ldots$$

Ze všech těchto posloupností daných rekurentním vztahem (1) je nejznámější ta, která má $a_1 = 1; \ a_2 = 1$. Je to fascinující *Fibonacciho posloupnost* (*FP*)

$$1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144 \ldots \tag{2}$$

Její členy se označují $F_1, F_2, \ldots$

$$\boxed{F_{n+2} = F_{n+1} + F_n; \quad F_1 = 1,\ F_2 = 1} \tag{3}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_3 &= 2 \\ F_4 &= 3 \\ F_5 &= 5 \\ F_6 &= 8 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4}$$

1.2 Vyjádření libovolné posloupnosti dané rekurentním vztahem (1) pomocí *FP*

Vypíšeme si PRPÁČ posloupnosti dané rekurentním vztahem (1):

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_2 \\ a_3 &= a_1 + a_2 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 \\ a_4 &= a_1 + 2a_2 = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 = F_2 \cdot a_1 + F_3 \cdot a_2 \\ a_5 &= 2a_1 + 3a_2 = 2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2 = F_3 \cdot a_1 + F_4 \cdot a_2 \\ a_6 &= 3a_1 + 5a_2 = 3 \cdot a_1 + 5 \cdot a_2 = F_4 \cdot a_1 + F_5 \cdot a_2 \\ a_7 &= 5a_1 + 8a_2 = 5 \cdot a_1 + 8 \cdot a_2 = F_5 \cdot a_1 + F_6 \cdot a_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vidíme, že se nám zde, počínaje členem a_3, objevují členy FB!
Hypotéza pro n-tý člen posloupnosti dané rekurentním vztahem (1):

$$\boxed{\forall n \in N; n \geq 3 : a_n = F_{n-2} \cdot a_1 + F_{n-1} \cdot a_2} \tag{5}$$

Důkaz hypotézy (5) pomocí pricipu <u>silné</u> matematické indukce:
1) <u>$n = 3$</u>:

$$a_3 = F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 \rightarrow \text{OK}$$

2) <u>Indukční krok</u>:

$$\begin{gathered}\forall k \in N; k \geq 3 : \\ (a_k = F_{k-2} \cdot a_1 + F_{k-1} \cdot a_2) \wedge (a_{k-1} = F_{k-3} \cdot a_1 + F_{k-2} \cdot a_2) \\ \Downarrow \\ a_{k+1} = F_{k-1} \cdot a_1 + F_k \cdot a_2\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}\text{důkaz IK: } L = a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} \\ &= F_{k-2} \cdot a_1 + F_{k-1} \cdot a_2 + F_{k-3} \cdot a_1 + F_{k-2} \cdot a_2 \\ &= (F_{k-3} + F_{k-2}) \cdot a_1 + (F_{k-2} + F_{k-1}) \cdot a_2 \\ &= F_{k-1} \cdot a_1 + F_k \cdot a_2 = P \quad \square\end{aligned}$$

1.3 *FP* se snaží být geometrickou a s rostoucím n jí to jde čím dál tím lépe, kvocík asi konverguje ke zlatému řezu

Fibonacciho posloupnost (FP) má mnoho zajímavých vlastností a my si povšimneme jedné z nich. Položíme si otázku, zda FP nepatří mezi posloupnosti *aritmetické* (AP) nebo *geometrické* (GP), které jsme zkoumali podrobně a které jsou mezi posloupnostmi vele-význačné.

Na první pohled z (2) vidíme, že AP to nebude – rozdíly mezi po sobě jdoucími členy se stále zvyšují. Není to tedy GP? To by musel být podíl dvou libovolných po sobě jdoucích členů roven nějaké (nenulové) konstantě. Tak si tyto podíly $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ vypíšeme:

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \frac{13}{8}; \frac{21}{13}; \frac{34}{21}; \frac{55}{34}; \frac{89}{55}; \frac{144}{89} \dots \tag{6}$$

čiliž zaokrouhleně na tři desetinná místa:

$$1,000; 2,000; 1,500; 1,667; 1,600; 1,625; \\ 1,615; 1,619; 1,618; 1,618; 1,618; \dots \tag{7}$$

Takže vidíme, že to sicejc není GP, páč kvocík není konstantní, nicméně to vypadá, že kvocík se postupně umoudřuje a začíná být velice rychle čím dál tím „konstantnější“ a tím pádem to vypadá, že se FP čím dále tím více stává posloupností *geometrickou*!

Dále máme jistě pocit, že hodnota (zaokrouhlená) 1,618, ke které se kvocík FP rychle blíží, je nám nějak povědomá. Ano, vypadá to na hodnotu *zlatého řezu* a této vlastnosti si všiml již Honza Keplerů, který kdysi pobíhal, spolu s Rudou Druhým, Tycho Brahem, Jostem Bürgi – vynálezcem logaritmů, Rabi Löwem, Golémem, Magistrem Edou Kelly a Johnem Dee, po naší stověžaté matičce všech měst, mysteriózní Praze.

1.4 Zlatý řez - připomenutí vo co jde

Zlatý řez známe důvěrně z geometrie. Tam se objevuje v podobě antické úlohy rozdělit úsečku na dva nestejně velké díly tak, aby toto rozdělení bylo co nejkrásnější – tedy aby byl poměr celku ku větší části roven poměru větší části ku menší. Potom říkáme, že je úsečka rozříznuta zlatým řezem. (Všimněmež si, že potom trojice menší část – větší část – celek tvoří GP.)

Má-li daná úsečka délku x a její větší část délku jednotkovou, má menší část délku $x-1$. Potom je poměr celku ku větší části roven $\frac{x}{1}$ a poměr větší části ku menší je $\frac{1}{x-1}$. Má tedy platit rovnost poměrů

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Z čehož plyne po úpravě

$$\begin{aligned} x^2 - x &= 1 \\ x^2 &= x + 1 \qquad (8) \\ x^2 - x - 1 &= 0 \qquad (9) \end{aligned}$$

Řešením kvadrátické rovnice (9) jsou dvě hodnoty, jedna kladná – to je *zlatý řez*

$$x_1 \overset{\text{ozn.}}{=} \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,618 \qquad (10)$$

a druhá záporná

$$x_2 \overset{\text{ozn.}}{=} \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \doteq -0,618 \qquad (11)$$

Pro hodnoty φ a ψ platí důležité vztahy dané rovnicí (8)

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1} \qquad (12)$$

$$\boxed{\psi^2 = \psi + 1} \qquad (13)$$

A mezi čísly φ a ψ platí vztahy (to si prosim tě odvoď sama):

$$\psi = 1 - \varphi \qquad (14)$$

$$\psi = -\frac{1}{\varphi} \qquad (15)$$

1.5 Důkaz domněnky, že kvocík *FP* konverguje ke zlatému řezu

Well, konstatovali jsme, že to vypadá tak, že poměr dvou po sobě jdoucích členů *FP* se s rostoucím n blíží k poměru zlatého řezu φ. Nyní se pokusíme toto smělé tvrzení dokázat.

Vezměmež tedy podíl dvou po sobě jdoucích členů *FP* a označmež jej x_n:

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \tag{16}$$

Naším cílem je tedy dokázat, že se tento podíl x_n pro n jdoucí do nekonečna blíží k poměru zlatého řezu φ:

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \tag{17}$$

Pro takto vzniklou posloupnost zlomků platí pro $(n+1)$-ní člen

$$x_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} \tag{18}$$

Za F_{n+2} dosadíme do (18) z rekurentního vztahu (3) a mámež:

$$x_{n+1} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{x_n} \tag{19}$$

Tím jsme dostali pro *posloupnost poměrů dvou po sobě jdoucích členů* *FP* interesantní rekurentní vztah

$$\boxed{x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}\,; \quad x_1 = 1\,; \quad n \in N} \tag{20}$$

Nyní si vypišmež pro kontrolu PRPÁČ:

$$x_1 = 1$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 1 + \frac{1}{1} = 2 \\
x_3 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
x_4 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Takže vidíme, že vskutku dostáváme hodnoty vypočítané v (6). Navíc dostáváme posloupnost červených řetězových zlomků, která se pro n jdoucí do nekonečna blíží k hodnotě nekonečného řetězového zlomku

$$x_\infty = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}, \tag{21}$$

který je soběpodobný, to jest jmenovatel prvního zlomku je roven celku x_∞:

$$x_\infty = 1 + \frac{1}{x_\infty} \tag{22}$$

Ale vztah (22) vede po úpravě na kvadrátickou rovnici

$$
\begin{aligned}
x_\infty^2 &= x_\infty + 1 \\
x_\infty^2 - x_\infty - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

což je rovnice (9), jejímž kladným kořenem je zlatý řez φ, což jsme chtěli dokázat.

1.6 Jaké musejí být v rekurentním vztahu $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ hodnoty a_1 a a_2, aby vznikla dokonale geometrická posloupnost?

V sekci 1.3 jsme zjistili, že *FP* není geometrická, ale s rostoucím n se ke geometrické přibližuje a v limitě je její kvocík roven zlatému řezu.

Nyní chceme zjistit, jaké počáteční hodnoty a_1 a a_2 musíme do rekurentního vztahu (1) dosadit, aby vznikla dokonale geometrická posloupnost a jaký bude mít tato posloupnost kvocík!

Geometrická posloupnost je každá posloupnost daná vztahem

$$a_n = a_1 q^{n-1}; \quad n \in N;\ a_1 \neq 0;\ q \neq 0 \tag{23}$$

Dle zadání má platit vztah

$$\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n} \tag{24}$$

Dle vztahu (23) je

$$a_{n+1} = a_1 q^n \tag{25}$$
$$a_{n+2} = a_1 q^{n+1} \tag{26}$$

Vztahy (25) a (26) frkneme do (24) a upravíme

$$\begin{aligned} a_1 q^{n+1} &= a_1 q^n + a_1 q^{n-1} \mid : a_1 (\neq 0) \\ q^{n+1} &= q^n + q^{n-1} \mid : q^n (\neq 0) \\ q &= 1 + \frac{1}{q} \end{aligned}$$

A dostáváme:

$$\boxed{q^2 = q + 1} \tag{27}$$

To je naše stará známá kvadrátická rovnice (8). Připomene si, že kořeny jsou φ a ψ. Kladný kořen je zlatý řez

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,618$$

a záporný kořen je číslo ψ

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \doteq -0,618$$

Platí pro ně vztahy (12), (13), (14), (15)

No, takže existují dvě sady takových geometrických posloupností (označme je G_n a H_n), které splňují rekurentní vztah (24) (Přeznačme první členy na a a b):

$$G_n = a\varphi^{n-1} \tag{28}$$

$$H_n = b\psi^{n-1} \tag{29}$$

kde a a b jsou libovolná nenulová reálná čísla. Tedy:

$$a, a\varphi, a\varphi^2, a\varphi^3 \dots \quad ; \quad b, b\psi, b\psi^2, b\psi^3 \dots$$

Například:

$$a = 4 \rightarrow \; 4, 4\varphi, 4\varphi^2, 4\varphi^3, 4\varphi^4 \dots$$
$$b = 7 \rightarrow \; 7, 7\psi, 7\psi^2, 7\psi^3, 7\psi^4 \dots$$

Nebo špecielně:

$$a = \varphi \rightarrow \; \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5 \dots \tag{30}$$

$$b = \psi \rightarrow \; \psi, \psi^2, \psi^3, \psi^4\psi^5 \dots \tag{31}$$

Závěr: Aby vznikla z rekurentního vztahu $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dokonalá *GP*, může být první člen libovolné nenulové reálné číslo a_1 a druhý člen musí být buď $a_1 \cdot \varphi$ nebo $a_1 \cdot \psi$.

1.7 Odvození Binetova vzorce

Všimněmež si nyní podrobněji špecielního případu posloupností G_n a H_n, a sice (30) a (31), tedy

$$G_n = \varphi^n; n \in N$$
$$H_n = \psi^n; n \in N$$

Již jsme dokázali, že pro $n \geq 3$ platí vztah (5), který se vztahuje na každou posloupnost danou rekurentním vztahem (23). Proto pro $n \geq 3$ můžeme pro G_n a H_n psát:

$$\varphi^n = F_{n-2} \cdot \varphi + F_{n-1} \cdot \varphi^2$$
$$\psi^n = F_{n-2} \cdot \psi + F_{n-1} \cdot \psi^2$$

Víme, že $\varphi^2 = \varphi + 1$ a $\psi^2 = \psi + 1$:

$$\varphi^n = F_{n-2} \cdot \varphi + F_{n-1} \cdot (\varphi + 1)$$
$$\psi^n = F_{n-2} \cdot \psi + F_{n-1} \cdot (\psi + 1)$$

Odečteme:

$$\varphi^n - \psi^n = F_{n-2} \cdot (\varphi - \psi) + F_{n-1} \cdot (\varphi - \psi)$$

Dále vytkneme:

$$\varphi^n - \psi^n = (\varphi - \psi)(F_{n-2} + F_{n-1})$$

Ale platí $\varphi - \psi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ a také $F_{n-2} + F_{n-1} = F_n$:

$$\varphi^n - \psi^n = \sqrt{5} F_n$$

A odtud dostáváme pro n-tý člen (pro $n \geq 3$) *FB*:

$$F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\psi^n}{\sqrt{5}}$$

Tento vztah však platí i pro $n = 1$ a $n = 2$:
Pro $n = 1$ máme:

$$F_1 = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} - \frac{\psi}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi - \psi}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \rightarrow \text{OK}.$$

Pro $n = 2$ máme:

$$F_2 = \frac{\varphi^2}{\sqrt{5}} - \frac{\psi^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\varphi + 1) - (\psi + 1)}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi - \psi}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \rightarrow \text{OK}.$$

Závěr: Pro n-tý člen *FP* platí *Binetův vztah*:

$$\boxed{F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\psi^n}{\sqrt{5}}; n \in N} \tag{32}$$

Další tvary vztahu:

$$\boxed{F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}} \tag{33}$$

$$\boxed{F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}} \tag{34}$$

$$\boxed{F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}} \tag{35}$$

$$\boxed{F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}} \tag{36}$$

1.8 Rozbor Bineťáku

Tak hele, vztah (32) se skládá z rozdílu dvou členů, které představují geometrické posloupnosti. Kvocíky jsou iracionální čísla $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, takže je překvapivé, že odečtením těchto posloupností vznikají přirozená čísla *FP*!

První posloupnost má kvocík $\varphi \doteq 1,618 > 1$, takže s rostoucím n roste nade všechny meze. Druhá posloupnost má kvocík $\psi = 1 - \varphi \doteq -0.618$, který je v absolutní hodnotě menší než jedna, takže členy této posloupnosti jdou v limitě s rostoucím n k nule.

Pro vyšší hodnoty n lze proto druhý člen Binetova vztahu oproti prvnímu zanedbat a jako odhad hodnoty *Fibonacciho* čísla F_n použít člen první:

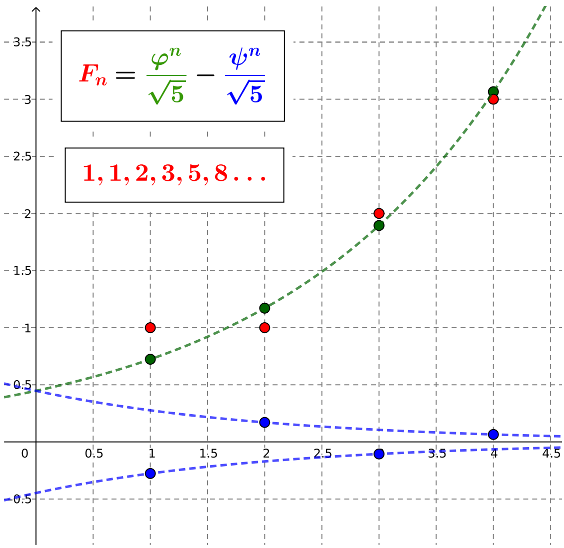
$$F_n \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \tag{37}$$

Vypišme si PRPÁČ:

$$0,724;\ 1,171;\ 1,894;\ 3,065;\ 4.960;\ 8,025;\ 12,985;\ 21,010;\ 33,994\ldots \tag{38}$$

Nyní vidíme, že dokonce už od prvního členu dostáváme při zaokrouhlení na nejbližší přirozené číslo správné hodnoty *FP*:

$$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ 34\ldots \tag{39}$$



n	$\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$	$\frac{\psi^n}{\sqrt{5}}$	$F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\psi^n}{\sqrt{5}}$
1	0.724	−0.276	1
2	1.171	0.171	1
3	1.894	−0.106	2
4	3.065	0.065	3
5	4.96	−0.04	5
6	8.025	0.025	8
7	12.985	−0.015	13
8	21.01	0.01	21
9	33.994	−0.006	34
10	55.004	0.004	55
11	88.998	−0.002	89
12	144.001	0.001	144
13	232.999	−0.001	233
14	377.001	0.001	377
15	610	0	610
16	987	0	987
17	1597	0	1597
18	2584	0	2584
19	4181	0	4181
20	6765	0	6765

1.9 Fibonacciho čísla jako geometrická řada

Podívejmež se podrobněji na pěkný tvar Bineťáku

$$\boxed{F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}} \tag{40}$$

Kurník Šopa! Nepřipomíná nám to něco ze základky? Vzpomeňmež na sérii pěkných vztahů:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ a^4 - b^4 &= (a-b)(a^3+a^2b+b^2a+b^3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Indukcí se snadno dokáže obecný vztah pro každé přirozené $n \geq 2$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1})$$

Čiliž zapsáno pomocí sumy

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} \tag{41}$$

Odtud dostáváme pro $n \geq 2$ Bineťák ve tvaru:

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{n-k} \psi^{k-1} \tag{42}$$

Ovšem snadno se přesvědčíme, že vztah platí i pro $n = 1$. Suma má potom jen jeden člen a vychází $\varphi^{1-1}\psi^{1-1} = \varphi^0\psi^0 = 1$, což je vskutku F_1. Dostáváme tedy další pěkný tvar Bineťáku:

$$\boxed{F_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi^{n-k} \psi^{k-1}; n \in N} \tag{43}$$

neboli pro PRPÁČ:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \varphi^0\psi^0 & F_1 &= 1 \\
F_2 &= \varphi^1\psi^0 + \varphi^0\psi^1 & F_2 &= \varphi + \psi \\
F_3 &= \varphi^2\psi^0 + \varphi^1\psi^1 + \varphi^2\psi^0 & F_3 &= \varphi^2 + \varphi\psi + \varphi^2 \\
F_4 &= \varphi^3\psi^0 + \varphi^2\psi^1 + \varphi^1\psi^2 + \varphi^0\psi^3 & F_4 &= \varphi^3 + \varphi^2\psi^1 + \varphi^1\psi^2 + \psi^3 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned} \tag{44}$$

a páč $\psi = -\dfrac{1}{\varphi}$, máme:

$$\varphi^{n-k}\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{k-1} = (-1)^{k-1}\varphi^{n-k}\varphi^{-k+1} = (-1)^{k-1}\varphi^{n+1-2k} \tag{45}$$

Pročež dostáváme

$$\boxed{F_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \varphi^{n+1-2k}; n \in N} \tag{46}$$

neboli pro PRPÁČ:

$$\boxed{\begin{aligned} &F_1 = \varphi^0 \\ &F_2 = \varphi^1 - \varphi^{-1} \\ &F_3 = \varphi^2 - \varphi^0 + \varphi^{-2} \\ &F_4 = \varphi^3 - \varphi^1 + \varphi^{-1} - \varphi^{-3} \\ &F_5 = \varphi^4 - \varphi^2 + \varphi^0 - \varphi^{-2} + \varphi^{-4} \\ &\quad \vdots \end{aligned}} \tag{47}$$

Takže každé Fibonacciho číslo F_n lze vyjádřit jako konečnou geometrickou řadu tvořenou n členy, s prvním členem φ^{n-1} a s kvocíkem $q = -\frac{1}{\varphi^2}$. Ale páč $-\frac{1}{\varphi} = \psi$, dostáváme $q = -\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{\varphi} = \psi \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$.

Vskutku, např. ve vztahu (44) vidíme krásně tuto skutečnost. První člen F_4 je φ^3 a vynásobíme-li jej kvocíkem $\frac{\psi}{\varphi}$, dostáváme $\varphi^3 \frac{\psi}{\varphi} = \varphi^2 \psi$, což je druhý člen v součtu (44) .

Δ

Da Sista Les

∞

.