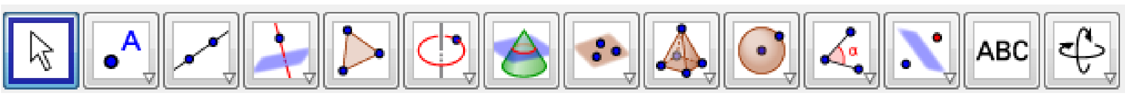
GeoGebra 3D

El programa GeoGebra, de geometría dinámica, es una herramienta imprescindible en el aula de matemáticas para hacer mucho más visible y entendible el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta materia. Al enseñar matemáticas es corriente encontrarse con problemas para que el alumnado, al menos el no universitario, se adapte con facilidad a las tres dimensiones. Por ello, el uso de GeoGebra es primordial para que el alumnado, con dificultad para visualizar las relaciones geométricas y analíticas en 3D, se adapte a esa visión.

La versión 5 de GeoGebra, aparecida en 2014, o la 6 posterior, nos permite trabajar con facilidad en el espacio. El objetivo de este taller es revisar algunos de los elementos tridimensionales que podemos utilizar en nuestras aulas con la ayuda de GeoGebra.

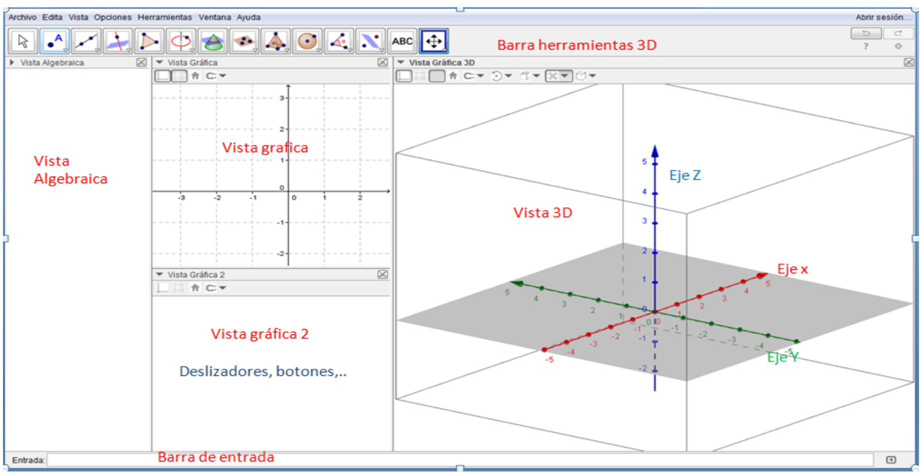
La vista 3D tiene barra de herramientas propia, con herramientas comunes a la vista gráfica 2D y otras específicas para trabajar en el espacio. Hay además multitud de comandos que amplían las posibilidades de construcción en el espacio.



La vista 3D, siguiendo la conocida filosofía de GeoGebra, está interconectada con el resto de las vistas, lo que aumenta su potencia y funcionalidad.

Para trabajar en la vista 3D, es conveniente que ésta ocupe una parte grande de la pantalla. Las vistas algebraica y gráfica (o gráfica 2) pueden estar presentes, por lo que es bueno tener una disposición de pantalla en que nos sintamos cómodos.

Una disposición adecuada puede ser como se muestra. No es mala idea, una vez que tengas una estructura a tu gusto, que guardes un archivo como plantilla.



Ocasionalmente pueden abrirse otras ventanas: CAS, Hoja Cálculo, proyección 2D,...

Utilizando el botón derecho del ratón sobre la vista gráfica, y pulsando los botones que se muestran en la imagen pueden configurarse algunos aspectos visuales.

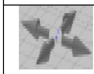
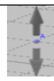
También con botón derecho sobre cualquier objeto, se accede a sus propiedades.

1.- Construcción de elementos básicos: punto, recta, plano.

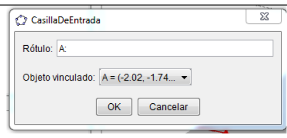
1.1 Creación de Puntos 3D.

Hay varias formas de crear puntos en la vista 3D.

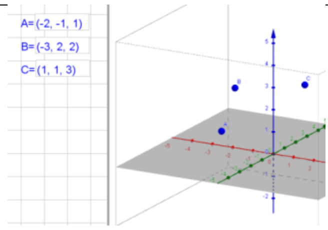
- Si creamos un punto sobre la vista gráfica, automáticamente se muestra sobre el plano base de la vista 3D.
- Seleccionamos la herramienta punto y hacemos clic en la vista 3D**. El punto se crea sobre el plano XY.** También pueden crearse puntos sobre uno de los ejes.

Este punto puede desplazarse con el ratón, bien sobre el plano XY o bien verticalmente.	Al hacer clic en el punto sale una de estas imágenes:			
		Desplazamiento sobre plano XY		Desplazamiento vertical.

- En la barra de entrada podemos introducir directamente sus coordenadas A = (1,1,2) y el punto se crea en esa posición que puede moverse con ratón como se ha indicado.
- Utilizando **casillas de entrada**. Es la forma más versátil.

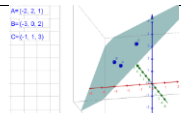
	Crea un punto en plano XY	
a=1	Crea una casilla de entrada en la vista gráfica o vista gráfica 2 En **Rótulo** escribe A: y, como **Objeto vinculado** selecciona A.	
Ahora puede editarse la casilla e introducir el punto que se desea o bien mover el punto con el ratón.		A: (-2.02, -1.74, 0)

1.2 Plano por tres puntos.

	Crea tres puntos A, B, C sobre el plano XY	
	Mueve al menos uno de ellos verticalmente.	
a=1	Crea tres casillas de entrada y vincula cada una de ellas a los puntos A, B, C	
Botón derecho sobre cada casilla, Propiedades: Texto: mediano, Estilo: longitud 10		
Mueve los puntos A, B, C con el ratón o bien editando coordenadas en las casillas de entrada.		

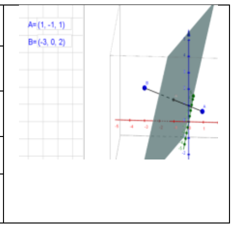
Tras hacer cualquier construcción, puedes modificar los aspectos visuales. Basta seleccionar con botón derecho el objeto que se desea modificar aspecto.

Determina la ecuación del plano que pasa por A(-2,-1,1), B(-3,2,2) y C=(-1,1,3)

	Plano por tres puntos. Selecciona A, B, C	
O bien, desde barra de entrada. **Plano(<Punto>, <Punto>, <Punto>)**		

1.3 Plano mediador de un segmento AB

	Crea A , B y las casillas de entrada.
	Punto medio o centro, selecciona A y B. Renómbralo como M.
	Selecciona los puntos A y B
	O bien **Segmento(<Punto (extremo)>, <Punto (extremo)>)**
	Plano perpendicular, selecciona el segmento AB y el punto M



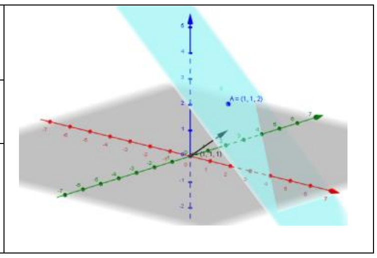
La construcción anterior puede hacerse directamente con la instrucción:

PlanoPerpendicular(PuntoMedio(A,B),Recta(A, B)), o con el comando **PlanoBisector(A, B)**

1.4 Plano a partir de vector normal y punto.

Representa el plano p que pasa por A=(1,1,2) con vector normal v=(1,1,1).

A=(1,1,2) v=(1,1,1)	*No puede llamarse π a un plano pero si puede usarse como rótulo.*
	Plano perpendicular y selecciona el punto y el vector.
Salvo que se indique lo contrario A (mayúscula)= GeoGebra entiende que es un punto. v (minúscula)= entiende que es un vector, lo que ahorra escritura.	



Puede representarse un plano introduciendo directamente su ecuación como, por ejemplo, 2x+3y-z+4=0. En este caso también es más versátil hacerlo mediante una casilla de entrada para modificar su ecuación de forma más fácil.

1.5 Representación de rectas en el espacio.

Para representar una recta puede hacerse:

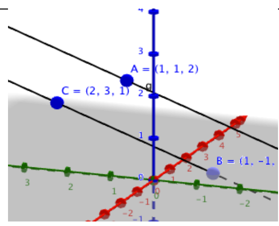
Recta(<Punto>, <Punto>) Recta(<Punto>, <Vector director>)

Recta(<Punto>, <Recta (paralela)>) Interseca(<Objeto>, <Objeto>) con objeto = plano

Cualquiera de estas formas puede hacerse desde la barra de herramientas seleccionando los objetos con el ratón.

Determina la ecuación de la recta que pasa por A(1,1,2) y es paralela a la recta que para por B(1,-1,0) y C(2,3,1).

A=(1,1,2) B=(1,-1,0) C=(2,3,1)	Construye los tres puntos.
	Representa la recta que pasa por B y C
	Recta paralela y selecciona recta y punto.



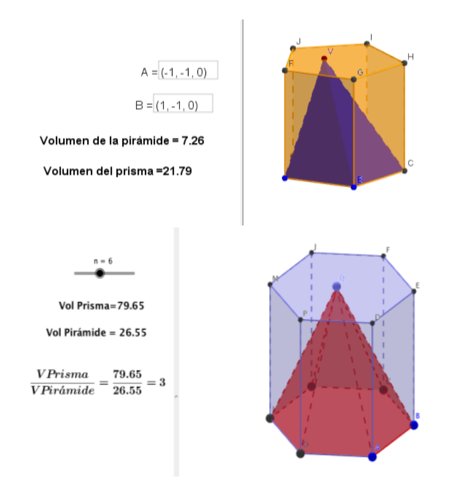
2.- Cuerpos geométricos.

Para construir un polígono regular en la vista 3D se utiliza la expresión: **Polígono(<Punto>, <Punto>, <Número de vértices>, <Dirección>).** Existe además una herramienta llamada **polígono regular**.

2.1 Prisma y pirámide

Introduce los puntos A=(-1, -2, 0) y B=(1, -1, 0) con cualquiera de las formas que hemos visto.

Polígono[A, B, 5, EjeZ]	
	Con la herramienta ***Extrusión a prisma,*** construye un prisma "levantando" el polígono anterior.
Cambia el color del prisma y reduce la opacidad al 25%.	
	Con la opción de ***Punto en objeto***, coloca un punto en la base superior del prisma, renómbralo a V.
Crea una pirámide con base el polígono inicial (polígono1) y de vértice V. **Pirámide(polígono1, V)**	
	Crea un texto en la ventana gráfica 2D donde aparezca el volumen del prisma, el de la pirámide y su relación.



Mediante un **deslizador n**, número de lados, puede generalizarse la construcción.

Mueve el punto V y comprueba que el volumen de la pirámide es siempre la tercera parte del volumen del prisma. Si cambias el punto A y B puedes comprobar que se mantiene la relación.

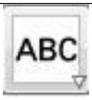
Puede también modificarse la altura de prisma y pirámide seleccionando con ratón la base superior y arrastrar hasta la altura deseada.

2.2. Figuras de Arquímedes.

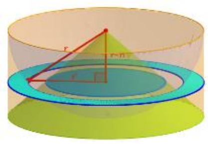
El resultado anterior fue demostrado por el matemático griego Demócrito (-460, -360), que también lo generalizó al cono y el cilindro. Arquímedes (-287, -212) encontró la relación entre el volumen del cilindro y de la esfera. Veámoslo con GeoGebra.

Introduce los puntos A = (0, 0, -1) y B = (0, 0, 5) de cualquiera de las formas.

	Halla el punto medio de A y B, llámalo O.
	Con la herramienta ***Esfera dado su centro y un punto*** construye la esfera de centro O y que pase por uno de los dos puntos.
Crea el valor del radio de la esfera con la orden, que es válida para esferas: **r = Radio(<circunferencia>)**	
	Elije la herramienta **Cilindro**. Pulsa en los puntos A y B e introduce en la casilla del radio el valor r.
Para hallar el volumen de la esfera debes usar la instrucción: **Volumen(<sólido>)**	

	Crea un texto en la ventana gráfica 2D donde aparezca el volumen del cilindro y la esfera. Comprueba que el volumen de la esfera es 2/3 de la del cilindro.

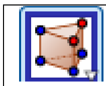
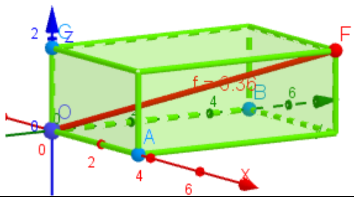
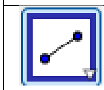
Como ampliación, puedes añadir el cono de base la circunferencia inferior y vértice en B y comprobar que su volumen es la tercera parte del cilindro y la mitad de la esfera.

Aplicando el principio de Cavalieri, puede hacerse una construcción un poco más compleja para calcular volumen de la esfera. https://www.geogebra.org/m/KNkb2Kyu	

2.3. Diagonal de un ortoedro. Teorema de Pitágoras en el espacio.

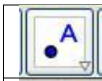
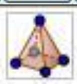
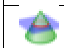
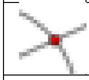
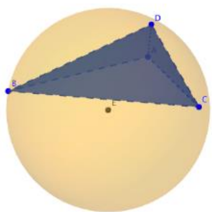
Crea tres deslizadores a, b, c en la vista gráfica o gráfica 2, con valores entre 1 y 5.

Construye los puntos O=(0,0,0), A=(a,0,0), B=(0,b,0),C=(0,0,c) y a continuación el rectángulo (base del ortoedro) de lados a y b. Una forma rápida de construir el cuarto vértice del rectángulo es A+B-O.

	Selecciona la herramienta prisma, y haz clic en rectángulo y punto C. Se construye el ortoedro.	
	**Selecciona la herramienta segmento y construye la diagonal del ortoedro.**	
Calcula la medida de la diagonal : **sqrt(a^2+b^2+c^2)**		

2.4. Esfera que pasa por cuatro puntos.

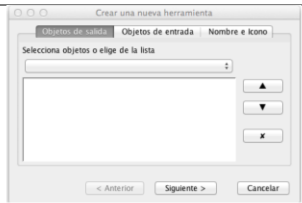
En esta actividad vamos a construir un tetraedro cualquiera y vamos a comprobar que existe una única esfera que pasa por los cuatro vértices.

	Crea tres puntos, A, B, C sobre el plano z=0 y un punto D fuera de él.	
	Con la herramienta pirámide construye el tetraedro de base ABC y vértice superior D. O bien **Pirámide(A,B,C,D)**	
Construye el plano mediador de, al menos, tres aristas del tetraedro, utilizando la orden: **PlanoBisector(<punto>,<punto>)** y representa los tres planos.		
	Con la herramienta ***Intersección de dos superficies*** construye dos rectas que sean intersección de los planos. O bien **Interseca(<Objeto>, <Objeto>)**	
	Utiliza la herramienta ***Intersección*** para hallar el punto de corte de las dos rectas.	
Oculta los planos y las rectas construidas.		
	Construye la esfera que tiene de centro el punto antes calculado y pasa por cualquiera de los cuatro vértices. **Esfera(<centro>,<punto>)**	

Si mueves cualquiera de los vértices comprobarás que la esfera es circunscrita al tetraedro.

Herramientas personales.

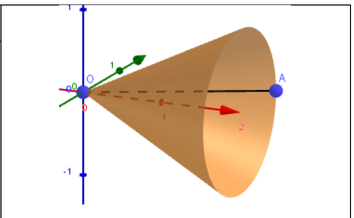
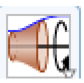
Crear una herramienta que, dados cuatro puntos no coplanarios, construya la esfera que pasa por ellos. Sobre la construcción anterior:

Menú Herramientas/ crear una nueva herramienta...	
Objetos de salida, desplegar menú y elegir **esfera**.	
Objetos de entrada, Seleccionar los 4 puntos, (ya aparecen seleccionados por defecto)	
Nombre e icono, dar nombre a la herramienta y si se desea un icono e instrucciones de uso de la herramienta.	

La herramienta creada se guarda junto al archivo. Puede también guardarse como archivo independiente con extensión .ggt y usarse en otra construcción que se precise.

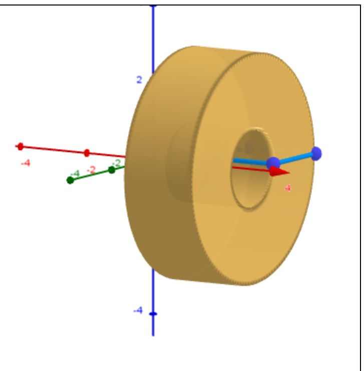
2.5. Generación de cuerpos de revolución.

En el apartado 6 de este archivo, se muestra una introducción a la construcción de superficies con GeoGebra. Vamos a ver en este apartado como construir algunas figuras sencillas: cilindro, cono, tronco de cono de una forma diferente a la comentada en párrafos anteriores.

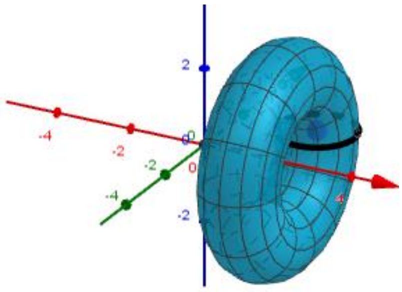
Construye el segmento de extremos A=(0,0,0) y B=(3,2,0).		
	Selecciona la herramienta **Superficie de revolución** y el segmento creado. Automáticamente se muestra la superficie generada por el segmento al girar 360º sobre el eje x.	
Mueve los puntos A y B para obtener un cilindro y un tronco de cono.		

Si se desea que el giro sea respecto a eje diferente al Eje X, hay que especificarlo mediante la instrucción: **Superficie(f, 360º,EjeY).** De forma análoga para un eje (recta) cualquiera.

Mediante un deslizador y un botón resulta sencillo mostrar cómo se genera la superficie.

Construye un cuadrilátero seleccionando 4 puntos en vista gráfica. Sea c1. Construye deslizador angular α **Superficie(c1,α,EjeX),** el resultado es la imagen que se muestra a la derecha. Modifica el cuadrilátero.		

Construye con la técnica descrita un toro de radios r=1, y R=3 alrededor del eje x



3.- Poliedros regulares.

3.1.1 Construcción de poliedros regulares.

GeoGebra dispone en la versión actual herramientas para construir automáticamente el Tetraedro  y el Cubo . Basta seleccionar la herramienta y dos puntos, o bien un triángulo equilátero para construir el tetraedro o un cuadrado para el cubo.

Construye un tetraedro o un cubo de esta forma.

Para los otros tres poliedros regulares Octaedro(A,B), Dodecaedro(A,B) e Icosaedro(A,B).

3.1.2 Plantilla para construir poliedros regulares

Para facilitar la construcción y posterior manipulación de poliedros regulares puede utilizarse una plantilla. La podrás encontrar en el libro adscrito al taller.

Plantilla preparada para facilitar construcción de poliedros regulares, de forma que ya aparezcan centrados en eje Z, y así facilitar rotaciones y otras operaciones.

Seleccionar **n=3 para construir tetraedro, octaedro e icosaedro** (cara triángulo equilátero), **n=4 para construir cubo** y **n=5 para dodecaedro**.

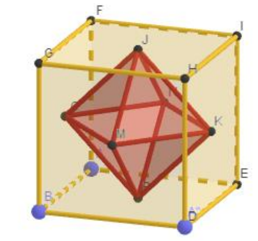
Para construir un poliedro regular basta escribir la instrucción: **Nombrepoliedro(A,B,C)** con nombrepoliedro= tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro o icosaedro según el poliedro regular que se desee construir.

Construye utilizando la plantilla un dodecaedro.

3.2. Dualidad en poliedros regulares.

Construye un Cubo y su poliedro dual, el octaedro

<table>
<tr><td colspan="2">Selecciona n=4 en la plantilla
Cubo[A,B,C]
Modifica aspectos visuales (color, grosor líneas, opacidad) del cubo seleccionándolo en ventana algebraica con botón derecho.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td>**Punto medio** de tres caras que concurren en un vértice, sean J,K,M.</td></tr>
</table>

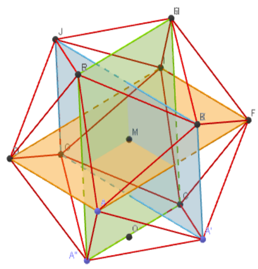
Octaedro(J,K,M) . Si el octaedro no sale en la posición deseada, cambiar orden de vértices.	
Puedes construir casillas de control para mostrar/ocultar el poliedro y su dual.	

Calcula el cociente entre el volumen del cubo y el octaedro dual.

Mide la arista de cubo y octaedro y calcula su cociente.

Utiliza el comando **Textoirracional(número)** para convertir en irracional el cociente calculado. ¿Qué número se obtiene?

3.3 Icosaedro y rectángulo áureo.

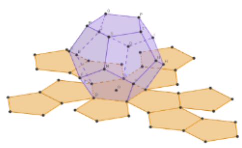
Selecciona n=3 en plantilla. **Icosaedro(A,B,C)**	
Construye un rectángulo uniendo vértices de dos aristas opuestas.	
Comprueba que el rectángulo construido es áureo. $a/b=(1+\sqrt{5})/2\approx 1.62$ Construye de igual forma otros dos rectángulos de forma que los tres sean perpendiculares.	

Puede hacerse también de forma inversa la construcción:

Construir tres rectángulos áureos perpendiculares y sobre sus vértices construir el icosaedro. Para ello define: a=0, b=1, c= (1+sqrt(5))/2 número de oro.

Define los puntos (a,b,c), (a,b,-c),(a,-b,c),(a,-b,-c),… rotando las letras. De esta forma se obtienen 12 punto que son los vértices del icosaedro.

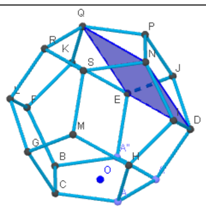
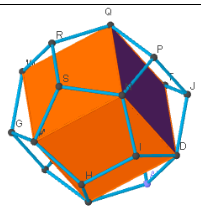
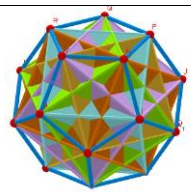
3.4 Desarrollo de poliedros regulares. Comando Desarrollo

Construye un dodecaedro: a = Dodecaedro(A,B,C).	
En vista gráfica 2, deslizador entre 0 y 1. Sea **t** su nombre	
Desarrollo(a,t)	

Un juego: entra en https://www.geogebra.org/m/AFpRQnaA y pon a prueba tu visión espacial.

3.4 Inscribir un poliedro regular en otro.

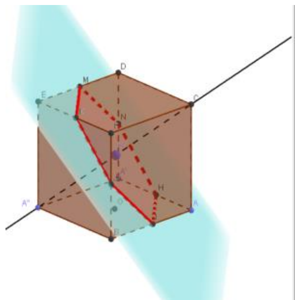
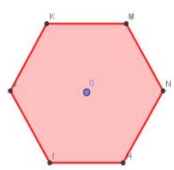
Inscribir un cubo en un dodecaedro.

Sobre la plantilla de apartado 1. Seleccionar n=5.		
Dodecaedro(A,B,C)		
	Construir polígono eligiendo 4 puntos que formen cuadrado. E,D,N,Q .	
Cubo[D,N,Q]. Sea b nombre del cubo. O bien selecciona la **herramienta cubo**, y haz clic sobre el cuadrado.		
		
Mediante rotaciones del cubo sobre el eje Z puede construirse la figura de la derecha donde se representan cinco cubos en el dodecaedro.		
Rota [b, 72°, EjeZ] Repetir cuatro veces cambiando el nombre del cubo a rotar o bien el ángulo.		

Puede hacerse de una sola vez mediante una secuencia, pero en este caso quedarían todos los cubos de igual color. **Secuencia(Rota(b, i 72°, EjeZ), i, 0, 4)** .

3.5 Cortes por un plano de poliedros regulares.

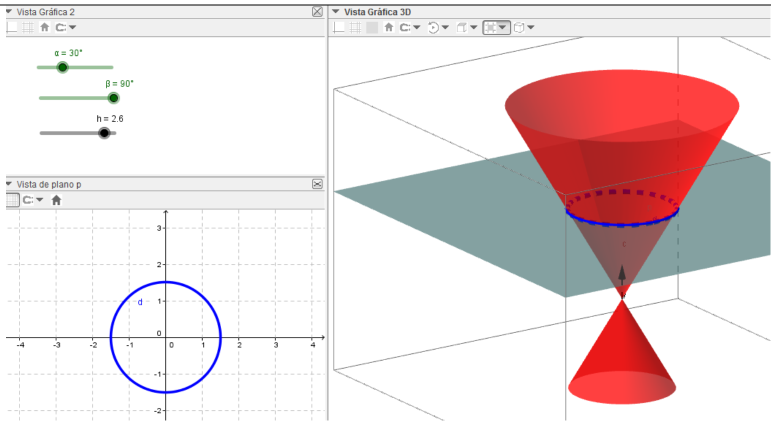
Cortes en un cubo por plano perpendicular a recta que pasa por vértices opuestos de un cubo.

Cubo(A,B,C) crea el cubo.		 
	Recta. Selecciona dos vértices opuestos.	
	Construye un punto sobre la recta	
	Plano perpendicular. Selecciona punto y recta.	
	Herramienta intersección de superficies. Selecciona el plano y el cubo.	
Botón derecho sobre plano y elige “representación 2D de …”. Se obtiene la imagen de la derecha.		
Mueve el punto sobre la recta para ver en la nueva vista las secciones que se originan.		

Puede generalizarse sin dificultad el problema: recta por aristas opuestas, caras opuestas,….

4.- Secciones Cónicas

Representar un cono infinito y un plano que al cortar se generen las cónicas**.**

	α ángulo entre 1 y 90 grados e incremento 1 grado.	Crea estos tres deslizadores.
	β ángulo entre 1 y 90 grados, incremento 1 grado.	
	h entre 1 y 4 incremento 0.1.	
	Pincha en el origen de coordenadas. O=(0,0,0)	
	v=(0,0,1) vector sobre eje Z.	
	ConoInfinito[O,v,α] crea el cono	
	a=Plano(EjeX,EjeZ) o bien a:y=0	Con estas operaciones conseguimos un plano fácilmente desplazable tanto en inclinación como en punto de corte con Eje Z.
	b = Rota(a,β,EjeX)	
	p = Traslada[b,(0,0,h)]	
	Selecciona la herramienta Intersección de dos superficies y haz clic en cono y plano. O bien escribe **Interseca(nombreplano, nombrecono)**	
	Pincha con botón derecho sobre el plano y selecciona: **Representación 2D de nombreplano**. Se abre una nueva ventana que representa el plano y los elementos que este contiene en una nueva vista gráfica.	
		
Basta mover deslizadores para ver las diferentes cónicas que se generan incluidas las degeneradas: punto, recta y dos rectas secantes.		

Propuesta avanzada: Incluir en la construcción textos con el nombre de la cónica que resulta en función de los valores de los parámetros α, β,h.

5.- Geometría analítica del espacio.

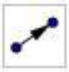
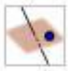
En estos ejercicios vamos a limitarnos a realizar la construcción geométrica. Utilizando simultáneamente la vista CAS pueden hacerse los cálculos.

5.1. Dividir un segmento en partes y plano perpendicular

Considera los puntos A(1, 2, 3) y B(1, 0, 4).

a) Halla las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB.

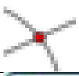
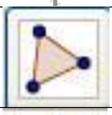
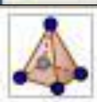
Introduce los puntos desde la barra de entrada.	
	Construye el vector ***u*** de A hasta B.
Los puntos que dividen al segmento en tres partes iguales son los siguientes: **M = A + u/3** y **N = A + 2u/3**	
	Selecciona la herramienta ***Plano perpendicular*** y pulsa sobre el punto A y el vector **u**.

5.2. Área y Volumen.

Considera el plano π de ecuación 2x + y + 3 z – 6 = 0.

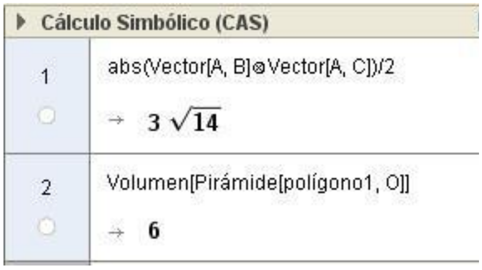
a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.

Introduce en la barra de entrada la ecuación general del plano.	
	Con la herramienta **Intersección** halla los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas. Sean A, B y C.
	**Con la herramienta Polígono, construye el triángulo de vértices A, B y C. En la ventana algebraica tendremos el valor de su área.**
	Introduce el punto O = (0, 0, 0). Con la herramienta Pirámide construye el tetraedro de base el polígono anterior y vértice en O. En la ventana algebraica nos aparecerá su volumen.

Con el proceso anterior obtendremos un valor aproximado del área y del volumen. Si queremos un valor exacto podemos utilizar la ventana CAS para realizar los cálculos más precisos.

Si suponemos que se han introducido los cuatro puntos, para el área del triángulo basta hallar la mitad del módulo (con el comando ***abs*** de valor absoluto) del producto vectorial del vector de A hasta B y del vector que une A con C.



Para el volumen se usa el comando correspondiente, bien directamente de la pirámide, si ya está construida, o creándola directamente, como se ve en la imagen adjunta.

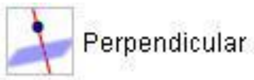
5.3. Paralelogramo.

De un paralelogramo ABCD conocemos tres vértices consecutivos A(2,-1,0), B(-2,1,0) y C(0,1,2).

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que los contiene.
b) Halla el área de dicho paralelogramo.
c) Calcula el vértice D.

Como casi todas las herramientas las hemos utilizado ya antes, vamos a indicar sólo los pasos a seguir:

1) Introducir los tres puntos en la barra de entrada.
2) Hallar el punto medio del segmento A y C, llamémoslo M.
3) Dibujar el plano que pasa por A, B y C.
4) Con la herramienta ***Perpendicular*** dibujamos la recta pedida tocando en el plano y en el punto M.



5) Para hallar el área del paralelogramo, sin haberlo dibujado aún, podemos utilizar la orden que hemos usado en la parte CAS del anterior, sin dividir ahora por 2. Se puede introducir también desde la barra de entrada.
6) Una forma rápida de calcular el vértice D es escribir B+C-A (GeoGebra suma vectores posición de los puntos)

Si ahora dibujáramos el paralelogramo ABCD veríamos que su área es la misma que hemos calculado antes.

5.4. Distancia de un punto a un plano.

Sean los puntos A(0, 0, 1), B(1, 0, -1), C(0, 1, -2) y D(1, 2, 0).

a) Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
b) Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.
c) Calcula la distancia del punto D al plano π.

Basta seguir los siguientes pasos.

1) Introducimos los cuatro puntos.

2) Seleccionamos la herramienta de ***Plano que pasa por tres puntos*** y dibujamos el plano que pasa por A, B y C. Suponemos que se llama a.
3) A simple vista se puede ver que el punto D no está en el plano. También podemos utilizar la orden lógica: **EstáEnRegión(D, a)** que nos dará como respuesta ***false***.
4) Para el último apartado basta utilizar el comando **Distancia(<Punto>, <Objeto>)** para hallar la distancia de D hasta el plano a. La distancia aparece en forma decimal. Si se desea el valor exacto puede hacerse desde la vista CAS. Una forma alternativa es utilizar el comando **Textoirracional(<numero>)** , obteniéndose un texto con la expresión irracional, $\sqrt{14}/2$ en este caso.

5.5. Centro del paralelogramo.

El punto M(1, -1, 0) es el centro de un paralelogramo y A(2, 1, -1) y B(0, -2, 3) son dos vértices consecutivos del mismo.

a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.
b) Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

Como todo lo hemos visto ya en casos similares, en éste no indicamos el proceso a seguir.

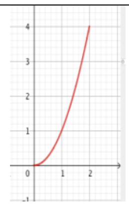
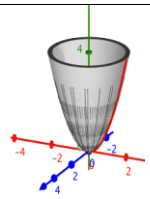
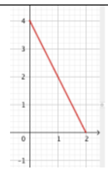
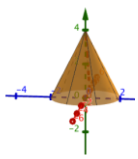
6.- Superficies

6.1 Superficies de revolución.

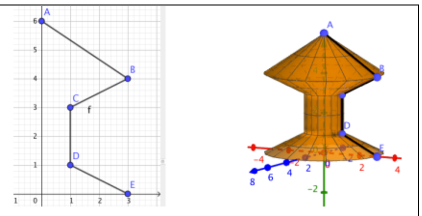
GeoGebra permite construir superficies de revolución de diferentes formas, veamos alguna:

- **Superficie(función, ángulo, recta)** La función puede estar definida en un intervalo, así como contener parámetros previamente definidos mediante deslizadores.

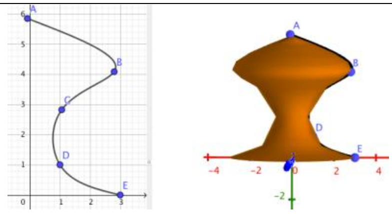
En la barra de entrada escribe:

Función(x^2,0,2) construye la parábola f(x)=x² en el intervalo (0,2) También puede escribirse : **Si(0<x<2,x^2)**	 
Superficie(f,360º,EjeY) crea el paraboloide de revolución. Si se desea ver en la posición habitual basta poner el Eje Y vertical. Botón derecho en graficas 3d, vista gráfica, Eje Y vertical.	
Construye un cono de base 2 y altura 4. La función en este caso es **Función(-2x+4,0,2)** También es posible **Superficie(segmento((2,0,0),(0,0,4)),360º, EjeZ)**	 

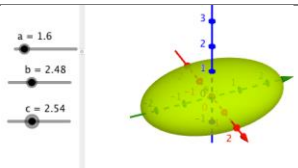
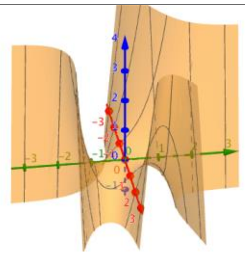
- **Superficie(poligonal, ángulo, Eje)**

Crea varios puntos A,B,C,D,E en la vista 2D **f = Poligonal(A,B,C,D,E**)	
Superficie(f,360º,EjeY)	

- Comando spline

Partiendo de la construcción anterior sobre la poligonal **Spline({A,B,C,D,E},3)** En general **Spline(<Lista de puntos>, <Grado ≥ 3>)** El comando Spline redondea o alisa la poligonal.	

6.2 Superficies en forma implícita y explicita.

GeoGebra permite construir funciones definidas en forma implícita si éstas son de grado <=2, cuádricas. La expresión x^2/a^2 +y^2/b^2+z^2/c^2 =1 construye el elipsoide de semiejes a, b, c.	
En forma explícita, con z despejada, se representa en principio cualquier superficie. La imagen de la derecha muestra la función multivariable: z= x^2y-x y^2 una variante de la superficie conocida como silla de mono.	

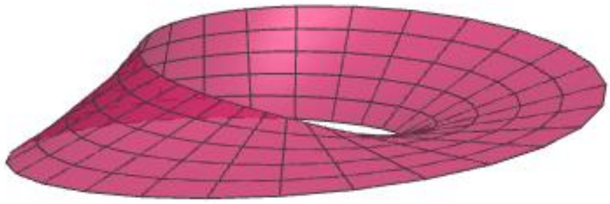
Construye el cilindro hiperbólico x^2/a^2-z^2/c^2=1. Modifica los parámetros a y c.
Se facilita la visualización eligiendo tamaño de la caja pequeño en el menú de la vista 3D.

6.3 Superficies mediante ecuaciones paramétricas.

Si se conocen las ecuaciones paramétricas de una superficie, GeoGebra la grafica con muy buena calidad. La instrucción genérica es:

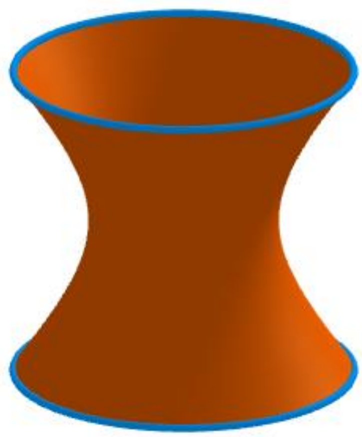
Superficie(<Expresión>,<Expresión>, <Expresión>,<Parámetro 1>,<Valor inicial 1>,<Valor final 1>, <Parámetro 2>, <Valor inicial 2>, <Valor final 2>)

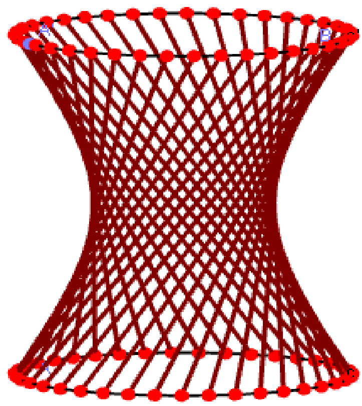
Superficie(r (1 + v / 2 cos(u / 2)) cos(u), r (1 + v / 2 cos(u / 2)) sen(u), b v / 2 sen(u / 2), u, 0, 2π, v, -c, c) construye la banda de Moebius de radio r y anchura 2c.



6.4.- Superficies regladas.

Hiperboloide como superficie reglada





Descarga los dos archivos del libro para ver como se realiza cada una de las construcciones anteriores.

En recursos GeoGebra de los autores puedes encontrar muchas más construcciones en 3D

Bernat Ancochea https://www.geogebra.org/u/bernat_geogebra

Jose Manuel Arranz https://www.geogebra.org/u/arranz

Pepe Muñoz https://www.geogebra.org/u/pepemunoz

Acceso a libro GeoGebra donde están todas las construcciones:
https://www.geogebra.org/m/sg5y8svx

O bien desde https://www.geogebra.org/u/arranz selecciona :