

Esercizio 1. Determinare un'equazione parametrica delle seguenti rette dello spazio:

- (a) Passante per il punto $P(1, 3, 1)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}_r = (2, 0, 0)$.
- (b) Passante per i punti $A(1, 0, 2)$ e $B(3, -1, 0)$.

SOLUZIONE:

- (a) Poiché conosciamo la direzione $\mathbf{v}_r = (2, 0, 0)$ della retta r cercata, possiamo scriverne direttamente un'equazione parametrica:

$$r : (x, y, z) = P + \mathbf{v}_r t = (1, 3, 1) + (2, 0, 0)t \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Notiamo che l'equazione si può equivalentemente scrivere

$$r : \begin{cases} x = s \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e che si tratta di una retta parallela all'asse delle x , passante per il punto $(0, 3, 1)$.

- (b) La retta cercata ha direzione $\mathbf{v}_r = B - A = (2, -1, -2)$, quindi:

$$r : (x, y, z) = A + \mathbf{v}_r t = (1, 0, 2) + (2, -1, -2)t \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

□

Esercizio 2. Verificare che le equazioni

$$r_1 : (x, y, z) = (-1, 1, 2) + (2, -2, 4)t \quad \text{e} \quad r_2 : (x, y, z) = (1, -1, 6) + (-3, 3, -6)s$$

descrivono la stessa retta.

SOLUZIONE:

La retta r_1 ha direzione $\mathbf{v}_1(2, -2, 4)$ e la retta r_2 ha direzione $\mathbf{v}_2 = (-3, 3, -6)$. Notiamo che i due vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 hanno differente modulo e verso, ma stessa direzione (infatti $\mathbf{v}_1 = -\frac{3}{2}\mathbf{v}_2$), quindi anche le rette r_1 e r_2 hanno la stessa direzione ovvero sono parallele. Ponendo per esempio $t = 0$ vediamo che la retta r_1 passa per il punto $A(1, 1, 2)$, basta ora verificare che tale punto appartiene anche a r_2 . Infatti il sistema

$$\begin{cases} 1 - 3s = -1 \\ -1 + 3s = 1 \\ 6 - 6s = 2 \end{cases} \Rightarrow s = \frac{2}{3}$$

ha soluzione $s = \frac{2}{3}$, quindi A appartiene anche alla retta r_2 . Infine r_1 e r_2 sono due rette parallele con il punto A in comune, ovvero sono coincidenti.

Notiamo che probabilmente sarebbe stato più semplice riscrivere dall'inizio le due rette nella forma

$$r_1 : (x, y, z) = (-1, 1, 2) + (1, -1, 2)t \quad r_2 : (x, y, z) = (1, -1, 6) + (1, -1, 2)s$$

Infatti i vettori $(2, -2, 4)$, $(-3, 3, -6)$ e $(1, -1, 2)$ hanno la stessa direzione, quindi possono essere indifferentemente presi come vettore direzione per descrivere le rette r_1 e r_2 .

□

Esercizio 3. Sia r_1 la retta di \mathbb{R}^3 passante per i punti $A(1, -1, 2)$ e $B(-2, 0, 1)$, e sia r_2 la retta contenente $C(1, 3, -3)$ e parallela al vettore $\mathbf{v}_2 = (2, -2, 3)$. Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).

SOLUZIONE:

La retta r_1 passa per B , ha direzione $\mathbf{v}_1 = B - A = (-3, 1, -1)$ e quindi equazione parametrica:

$$r_1 : (x, y, z) = B + \mathbf{v}_1 t = (-2, 0, 1) + (-3, 1, -1)t \Rightarrow r_1 : \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Analogamente la retta r_2 ha direzione $\mathbf{v}_2 = (2, -2, 3)$ e quindi equazione parametrica:

$$r_2 : (x, y, z) = C + \mathbf{v}_2 s = (1, 3, -3) + (2, -2, 3)s \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 3 - 2s \\ z = -3 + 3s \end{cases} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Osserviamo subito che r_1 e r_2 non sono parallele in quanto i vettori direzione \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 non hanno le componenti proporzionali uno rispetto all'altro: $\mathbf{v}_1 \neq \lambda \mathbf{v}_2$.

Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione $r_1 \cap r_2$ risolvendo il sistema di tre equazioni nelle due incognite t, s :

$$\begin{cases} -2 - 3t = 1 + 2s \\ t = 3 - 2s \\ 1 - t = -3 + 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 - 3(3 - 2s) = 1 + 2s \\ t = 3 - 2s \\ 1 - (3 - 2s) = -3 + 3s \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -7 + 6s = 1 + 2s \\ t = 3 - 2s \\ -2 + 2s = -3 + 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 3 - 2s \\ s = 1 \end{cases}$$

Poichè la prima e terza equazione si contraddicono il sistema non ammette soluzione e le rette non sono incidenti.

Infine le rette sono sghembe. □

Esercizio 4. Nello spazio, si considerino le rette r_1, r_2 di equazioni

$$r_1 : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -s \\ z = 3 + s \end{cases}$$

Determinare la loro posizione reciproca.

SOLUZIONE:

Le rette r_1 e r_2 hanno rispettivamente come vettore direzione i vettore $\mathbf{v}_1(3, -1, 1)$ e $\mathbf{v}_2(1, -1, 1)$. Di conseguenza r_1 e r_2 non sono parallele in quanto i vettori direzione \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 non hanno le componenti proporzionali uno rispetto all'altro: $\mathbf{v}_1 \neq \lambda \mathbf{v}_2$.

Mettiamo a sistema r_1 e r_2 per calcolarne l'eventuale intersezione:

$$\begin{cases} 3t = 2 + s \\ 2 - t = -s \\ 1 + t = 3 + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 3t - 2 \\ 2 - t = -3t + 2 \\ 1 + t = 3 + 3t - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -2 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Il sistema è compatibile, quindi le rette sono incidenti. Sostituendo $t = 0$ nell'equazione di r_1 , o analogamente $s = -2$ nell'equazione di r_2 , si ottiene che le rette si intersecano nel punto $P(0, 2, 1)$. □