Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 13 - cambio de variable en raíces del mismo radicando

1. Calcula $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

Radicando: x

Índice de las raíces: $2{,}3 \quad \rightarrow \quad m.c.m. \equiv 6$

Cambio de variable → $x=t^6 \quad \rightarrow \quad dx=6\cdot t^5\,dt$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int \frac{1-t^{\frac{6}{2}}}{t^{\frac{6}{3}}}\cdot 6\cdot t^5\,dt=6\cdot\int \frac{1-t^3}{t^2}\cdot t^5\,dt=6\cdot\int (1-t^3)\cdot t^3\,dt=6\cdot\int (t^3-t^6)\,dt$$

$$6\cdot\int t^3\,dt-6\cdot\int t^6\,dt=\frac{6}{4}\cdot t^4-\frac{6}{7}\cdot t^7+C$$

Deshacemos el cambio de variable (repito, que no se olvide deshacer el cambio de variable).

$$x=t^6 \quad \rightarrow \quad \sqrt[6]{x}=t$$

$$I=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{4}{6}}-\frac{6}{7}\cdot x^{\frac{7}{6}}+C=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}-\frac{6}{7}\cdot x\cdot\sqrt[6]{x}+C$$

2. Utilizando el cambio de variable $1+x^2=t^2$, calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ que cumpla $F(0)=0$.

Debemos resolver la siguiente integral indefinida:

$$I=\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx \rightarrow \text{cambio de variable } 1+x^2=t^2 \rightarrow \text{diferenciamos } 2x\,dx=2t\,dt \rightarrow dx=\frac{t}{x}dt$$

Sustituimos en la integral.

$$I=\int \frac{x^3}{\sqrt{t^2}}\cdot\frac{t}{x}dt \rightarrow \text{Simplificamos} \rightarrow I=\int x^2\,dt \rightarrow \text{Del cambio de variable } x^2=t^2-1$$

Sustituimos.

$$I=\int (t^2-1)dt=\int t^2\,dt-\int dt=\frac{t^3}{3}-t+C$$

Deshacemos el cambio de variable $1+x^2=t^2 \rightarrow t=\sqrt{1+x^2}$

$$I=\frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3}-\sqrt{1+x^2}+C$$

De las infinitas primitivas de I buscamos la que cumpla $F(0)=0$. Si llevamos esta condición de contorno al resultado de la integral indefinida.

$$\frac{1}{3}-1+C=0 \rightarrow C=\frac{2}{3}$$

Solución final → $F(x)=\frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3}-\sqrt{1+x^2}+\frac{2}{3}$

3. Resuelve $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}-3}dx$

$I=\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}-3}dx$ → cambio de variable $x=t^4 \rightarrow dx=4t^3dt$

$I=\int \frac{1}{\sqrt[4]{t^4}-3}4t^3dt \rightarrow I=\int \frac{4t^3}{t-3}dt=4\int \frac{t^3}{t-3}dt$

Dividimos los polinomios → $\frac{t^3}{t-3}=t^2+3t+9+\frac{27}{t-3}$

$$I=4\int \frac{t^3}{t-3}dt=4\int (t^2+3t+9)dt+4\cdot 27\int \frac{1}{t-3}dt=\frac{4}{3}t^3+6t^2+36t+108\ln|t-3|+C$$

Deshacemos el cambio de variable → $x=t^4 \rightarrow \sqrt[4]{x}=t$

$$I=\frac{4}{3}x^{3/4}+6x^{1/2}+36x^{1/4}+108\ln|x^{1/4}-3|+C$$

4. Resuelve $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+1}dx$

$\int \frac{\sqrt{x}}{3x+1}dx$ → cambio de variable → $x=t^2 \rightarrow dx=2t\,dt$

$$I=\int \frac{\sqrt{t^2}}{3t^2+1}2t\,dt=\int \frac{2t^2}{3t^2+1}dt=2\int \frac{t^2}{3t^2+1}dt=\frac{2}{3}\int \frac{3t^2}{3t^2+1}dt=\frac{2}{3}\int \frac{3t^2+1-1}{3t^2+1}dt$$

$$I=\frac{2}{3}\int dt-\frac{2}{3}\int \frac{1}{3t^2+1}dt=\frac{2}{3}t-\frac{2}{3}\int \frac{1}{1+(\sqrt{3}t)^2}dt=\frac{2}{3}t-\frac{2}{3\cdot\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3}t)^2}dt$$

$$I=\frac{2}{3}t-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}arcotg(\sqrt{3}t)+C$$

Deshacemos el cambio de variable → $x=t^2 \rightarrow \sqrt{x}=t$

$$I=\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}arcotg(\sqrt{3x})+C$$

5. Resuelve $\int x\sqrt{x+1}\,dx$ **.**

Cambio de variable: $x+1=t^2$ → diferenciamos → $dx=2t\,dt$

Sustituimos en la integral, sabiendo que $x=t^2-1$

$$I=\int x\sqrt{x+1}\,dx=\int (t^2-1)\cdot\sqrt{(t^2)}\cdot 2t\,dt=\int (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,dt=2\int (t^2-1)t^2\,dt=2\int (t^4-t^2)\,dt$$

$$I=2\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3}$$

Deshacer cambio, sabiendo que $x+1=t^2 \rightarrow t=\sqrt{x+1}$

$$I=2\frac{(x+1)^{5/2}}{5}-2\frac{(x+1)^{3/2}}{3}+C$$

6. Resuelve $\int \frac{x^3 \cdot \sqrt{1+x^4}}{1+\sqrt{1+x^4}} dx$ **(ayuda: cambio de variable** $1+x^4=t^2$ **)**

$cambio\ variable \rightarrow 1+x^4=t^2$ → diferenciar → $4x^3\ dx=2t\ dt \rightarrow dx=\frac{t}{2x^3}\ dt$

$I=\int \frac{x^3 \cdot t}{1+t} \cdot \frac{t}{2x^3} dt=\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t} dt$ → realizamos división de polinomios en la integral

Al dividir t^2 entre $(t+1)$ obtenemos $(t-1)$ de cociente y 1 de resto.

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(1+t)} dt=\frac{1}{2}\int t\,dt-\frac{1}{2}\int 1\,dt+\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+t)} dt$$

$$I=\frac{1}{2}\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln|1+t|+C$$

Deshacemos el cambio de variable: $1+x^4=t^2 \rightarrow t=\sqrt{1+x^4}$

$$I=\frac{1}{4}(1+x^4)-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}+\frac{1}{2}\ln\left|1+\sqrt{1+x^4}\right|+C$$

7. Resuelve $\int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,dx$

Aplicamos el cambio de variable $\frac{x+2}{x-1}=t^2 \rightarrow \frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2}dx=2t\,dt \rightarrow \frac{-3}{(x-1)^2}dx=2t\,dt$

$$dx=\frac{-2t}{3}(x-1)^2\,dt$$

Sustituimos en la integral.

$$I=\int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,dx=\int t\cdot\frac{-2t}{3}(x-1)^2\,dt$$

Debemos expresar x en función de t $\rightarrow$ $\frac{x+2}{x-1}=t^2 \rightarrow x+2=x\cdot t^2-t^2 \rightarrow 2+t^2=x\cdot t^2-x$

$$2+t^2=x(t^2-1) \rightarrow x=\frac{2+t^2}{t^2-1}$$

Sustituimos:

$$I=\int \frac{-2t^2}{3}\left(\frac{2+t^2}{t^2-1}-1\right)^2 dt=\int \frac{-2t^2}{3}\left(\frac{3}{t^2-1}\right)^2 dt=-6\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}dt=-6\int \frac{t^2}{(t+1)^2\cdot(t-1)^2}dt$$

Aplicamos el método de los coeficientes indeterminados, ya que tenemos dos raíces dobles en el denominador.

$$\frac{t^2}{(t+1)^2\cdot(t-1)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{(t-1)}+\frac{D}{(t-1)^2}$$

$$I=-6\left(A\ln|t+1|-B\frac{1}{t+1}+C\ln|t-1|-D\frac{1}{t-1}\right)$$

Dando valores, obtenemos → $A=\frac{-1}{4}$, $B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{4}$, $D=\frac{1}{4}$

Por lo que la integral queda:

$$I=-6\left(\frac{-1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{4}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\frac{1}{t-1}\right)$$

Deshacemos el cambio de variable $\frac{x+2}{x-1}=t^2 \rightarrow \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=t$

$$I=\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+1\right|+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+1}-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}-1\right|+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}-1}+C$$