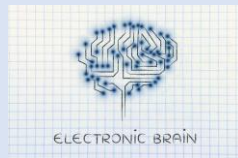


## Kein Mensch lernt digital, aber ...



Hans-Jürgen Elschenbroich

[www.geogebra.org/m/bfge3aae](http://www.geogebra.org/m/bfge3aae)



## Agenda

1. „Kein Mensch lernt digital“
2. Digitalisierung & Digitalität
3. Digitale Medien & Werkzeuge im MU
4. Alte Aufgaben - Neue Werkzeuge?
5. **Neue Werkzeuge - neue Aufgaben!**
6. Fazit



[www.geogebra.org/m/bfge3aae](http://www.geogebra.org/m/bfge3aae)

## I. „Kein Mensch lernt digital“

### 1. Lankau: Kein Mensch lernt digital



Aber es gilt genauso:

**Kein Elektronengehirn arbeitet analog!**

### 1. Zustimmung (1)

- Kein Mensch lernt digital (S. 10)
- Bildung ist etwas, das Menschen mit sich und für sich machen (S. 12)
- Lernen muss jeder selbst (S. 43)
- Berechtigte Kritik: Statt mehr Geld für Menschen, insbesondere für mehr Lehrerinnen und Lehrer, gibt es mehr Geld für Technik (S. 21)
- Konzepte des ‚digitalen Lernens‘ sind Neuauflagen des programmierten Lernens der 1960er Jahre (S. 25) und des Distance Learning (S. 37) mit moderner Technologie.
- Das ist die digitale Variante des Nürnberger Trichters (S. 31)

### 1. Zustimmung (2)

- Es bleibt die Frage offen, was und wie man durch das Anschauen von Videos lernt (S. 28), man ist dabei im Rezipientenmodus (S. 34)
- Es gibt keinen Unterricht ohne Medien (S. 82)
- Medien sind kein Selbstzweck (S. 81)
- Man muss mit analogen Mitteln die Basis legen, um digitale Werkzeuge kreativ zu nutzen (S. 83)
- Aufwändige Animationen absorbieren Aufmerksamkeit, die zum Lernen gebraucht würde (S. 95)
- Digitale Medien führen nicht per se zu besseren Schülerleistungen, es kommt auf die Lehrer an (S. 95)

## 1. Desiderate

- Zentrales Kapitel ist (aus meiner Sicht): **5 Medien, Technik, Unterricht**. Mit 10 % der Buch-Seiten überraschend schmal ausgefallen.
- Erwartung enttäuscht, dass es dabei auch inhaltlich um *Unterricht in Fächern* und den Einsatz von digitalen Medien und Technik darin gehen würde.
- *Medienpädagogisches* Buch.
- *Fachdidaktische* Sicht? Fehlanzeige!
- **Wie** kann man **mit** digitalen Medien mehr, besser, nachhaltiger lernen? Dieser Vortrag ist ein mathematisches Add on zum Buch.

## II. Digitalisierung & Digitalität

## 2. Digital first

- Die Digitalisierung ändert alles.



- Bedenken?  
**BeDENKEN!**



## 2. Macht der Computer schlau?



### Das Handy macht schlauer als gedacht

Titel in der Rheinischen Post 8.11.2019

## 2. Macht der Computer schlau?

Digitalisierung wird heutzutage zu oft verkürzt als Geräte-Offensive verstanden (iPads, Apple-TVs, Smartboards).

Der Computer alleine macht (beim Lernen) erst mal garnichts!  
Auch lernt man mit 2 Computern nicht besser als mit 1.

Man kann mit dem Computer lernen, je nachdem besser oder schlechter als ohne.

Aber jeder kann nur selber lernen (wer sollte es auch sonst für einen tun?).

## 2. Digitalisierung? Digitalität!

„Zu einer erfolgreichen schulischen Digitalisierung gehört mehr als Geräte, PDFs und WLAN, es müssen die **schulischen Lern- und Lehrprozesse** neu gedacht und neu gestaltet werden.“

„Wer aber Digitalisierung so versteht und organisiert, dass alles nur noch digital gehen soll, begeht auch einen folgenschweren Fehler.

**Wir müssen uns immer wieder neu überlegen: Was sollen Schüler noch per Hand können und tun und was nicht (mehr)?**

Das ist der Kern der Digitalität in der Schule.“

(Elschenbroich 2019)

## 2. DigitalPakt Schule

- „Der Bund stellt über einen Zeitraum von fünf Jahren insgesamt fünf Milliarden Euro zur Verfügung, davon in dieser Legislaturperiode 3,5 Milliarden Euro. Aufgrund des Charakters der Bundesmittel als Finanzhilfen bringen die kommunalen und privaten Schulträger bzw. Länder zusätzlich einen finanziellen Eigenanteil ein. Zusammengekommen stehen dann insgesamt mindestens 5,55 Milliarden Euro bereit.“
- Rein rechnerisch bedeutet dies für jede der ca. 40.000 Schulen in Deutschland im Durchschnitt einen Betrag von 137.000 Euro oder umgerechnet auf die derzeit ca. 11 Millionen Schülerinnen und Schüler eine Summe von **500 Euro pro Schüler.**“
- „Förderfähig sind insbesondere die breitbandige Verkabelung innerhalb der Schulen bis zum Klassenzimmer, die WLAN-Ausleuchtung sowie stationäre Endgeräte wie zum Beispiel Interaktive Tafeln.“
- Momentan rollte Corona-bedingt eine iPad-Ausstattungswelle durch das Land.

Geräte-Offensiv! Was ist mit Software, Lehrer-Fortbildung und technischer Unterstützung?

## III. Digitale Medien & Werkzeuge im MU

## 3. Artefakt – Instrument

- Unterscheidung Artefakt – Instrument.
- Gitarre als Artefakt: Holzkasten mit Drähten.
- *Konzept der instrumentalen Genese* (nach Rabardel 1995, Hoyles & Noss 2003):  
Es geht darum, dass „ein Nutzer sich ein zunächst allgemeines ‚Artefakt‘ zu eigen macht, zum ‚Instrument‘ macht, um es für die eigenen mathematischen Handlungen und Intentionen zu nutzen.“ (Barzel, 2016)



## 3. Instrumentalisation



## 3. Instrumentale Genese?

- Gilt auch für mathematische Werkzeuge!
- „Transforming any tool into a mathematical instrument for students involves a complex ‘instrumentation’ process“. (Guin & Trouche, 1998)



## 3. Instrumentale Genese?

- „Das beste Werkzeug ist ein Tand in eines tumben Toren Hand“ (Daniel Düsentrieb)



### 3. Medien – Werkzeug

- Medium: Träger oder Übermittler von Informationen. „Neue“ Medien sind ein unspezifischer Begriff!
- Werkzeug: Ein Hilfsmittel, um auf etwas einzuwirken.
- Das Werkzeug muss zur Aufgabe passen! Und umgekehrt!



### 3 Digitale Werkzeuge im MU

- TR, GTR
- Computer/ Laptop, Tablet, (Smartphone)
- Digitale Tafel, Beamer etc.
- Typische Mathematik-Software:
  - Dynamische Geometrie-Software (DGS)
  - Tabellenkalkulation
  - Funktionenplotter
  - Computer-Algebra Software (CAS)
  - 3D Geometrie Software
  - Stochastik-Software
- MultiRepräsentationssoftware (z. B. GeoGebra, TI-Nspire)

### 3. Lernwerkzeuge

- „Gute Lernwerkzeuge sorgen für eine Arbeitserleichterung und ermöglichen bzw. unterstützen wichtige **Lernaktivitäten**.“ (Elschenbroich 2011).
- „Digitale Werkzeuge eröffnen mathematische Erfahrungsräume, die ohne diese nur schwer zugänglich wären. Wir sehen dabei im Wesentlichen zwei Ebenen, die den Nutzen digitaler Werkzeuge verdeutlichen: die **systematische Variation** und die **dynamische Visualisierung**.“ (Heintz et al, 2017).
- „Der Lehrer ist gefordert, geeignete **Lerngelegenheiten** mit genügend Raum für eigene Erkundungen der Schüler zu schaffen.“ (Elschenbroich & Heintz, 2008)

### 3 Dynamische Lernumgebungen

- Vom leeren Bildschirm an alles selber konstruieren (lassen) oder
- Mit dynamischen Arbeitsblättern als Lernumgebung arbeiten.



Werkzeug: Universell einsetzbar.



Lernumgebung: Vorgegebener Rahmen

### IV. Alte Aufgaben - Neue Werkzeuge ?

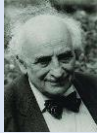
### 4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge

- „Waren früher einfache Additionen und Multiplikationen **Grundoperationen**, so machte der Taschenrechner beispielsweise das Berechnen von Wurzeln, das Potenzieren oder Logarithmieren zu Grundoperationen, der Funktionenplotter das Zeichnen von Funktionsgraphen, die Computeralgebra das Gleichungslösen, Differenzieren, Integrieren oder Matrizenrechnen.“
- „War früher mit Zirkel und Lineal das Zeichnen von Punkten, Geraden und Kreisen eine Grundoperation, so machte das Geodreieck das Konstruieren von Senkrechten und Parallelen zur Grundoperation. Dynamische Geometrie-Software [...] fügt das Konstruieren von Mittelsenkrechten, Winkelhalbierenden, das dynamische Messen von Abständen und Winkeln und das Zeichnen von Ortslinien hinzu.“ (Elschenbroich 2011)

#### 4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge

- „Wenn unser Unterricht heute darin besteht, dass wir Kindern Dinge eintrichtern, die in einem oder zwei Jahrzehnten besser von Rechenmaschinen erledigt werden, beschwören wir Katastrophen herauf.“

(Freudenthal, 1973)



#### 4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge

- „Wir können unseren Kindern nicht beibringen, mit Maschinen zu konkurrieren. [...]

Alles was wir lehren, muss sich von Maschinen unterscheiden.

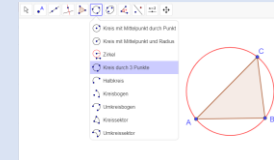
Wenn Maschinen es besser können, müssen wir nochmal darüber nachdenken.“  
(Jack Ma, World Economic Forum 2018)



#### 4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge (Geometrie)

- Alte Aufgabe: Umkreis eines Dreiecks konstruieren

- Neues Werkzeug GeoGebra:  
Befehl Kreis durch 3 Punkte.



#### 4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge (Arithmetik)

- Alte Aufgabe:  $\sqrt{12345}$
- Per Hand ausrechnen?
- Tafelwerk? Rechenschieber?

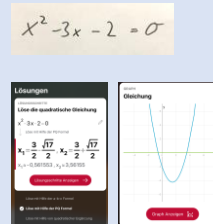
- Neues Werkzeug:  
Taschenrechner, App



#### 4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge (Algebra)

- Alte Aufgabe: Quadratische Gleichung
- p-q-Formel?
- Quadratische Ergänzung?
- TR: numerische Lösung

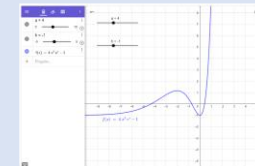
- Neues Werkzeug: App Photomath



#### 4 Alte Aufgaben – Neue Werkzeuge (Funktionen)

- Alte Aufgabe: Kurvendiskussion.  
 $f(x) = 4x^2e^x - 1$
- Ableitungen, Nullstellen etc.
- Graph skizzieren

- „Neues“ Werkzeug: Funktionenplotter  
(GeoGebra Grafikrechner-App).  
 $f(x) = \dots$ , Nullstellen, Extremum.  
Mit Parametern ‚spielen‘.



## V. Neue Werkzeuge - neue Aufgaben!

[www.geogebra.org/m/bfge3aae](http://www.geogebra.org/m/bfge3aae)

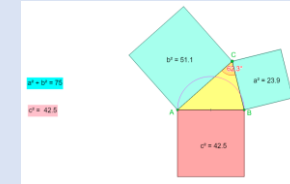


## 5. Digitale Lernumgebungen konkret (mit GeoGebra)

1. Geometrie
2. Algebra
3. Funktionen
4. Raumgeometrie
5. Analysis
6. Stochastik



## 5.1 Geometrie: Satz des Pythagoras

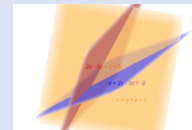


## 5.1 Geometrie: Satz des Pythagoras

- Klassisch: Starre Satzformulierung und Beweis.
- Dynamische Visualisierung.
- Systematisches Variieren (Zugmodus, Schieberegler), Entdecken.
- Mächtige Tools von GeoGebra.
- Sinnvolle Fallunterscheidungen finden.
- Invarianz finden. Verallgemeinerung.
- Verstehen: „warum muss das so sein?“, visueller Beweis.
- Lokales Vernetzen (Satz des Thales).

## 5.2 Algebra: 3x3 LGS

- Bei 2x2 LGS ist in der Sekundarstufe I die grafische Lösung selbstverständlich.
- Bei 3x3 LGS Fehlzanzeige (erst Sek II). Es gab kein geeignetes Werkzeug.



## 5.2 Algebra: 3x3 LGS

- 2x2 LGS: rechnerische Lösung und graphische Lösung.
- Klassisch 3x3 LGS: Kalkül ohne eine graphische Vorstellung.
- Dynamische Visualisierung.
- Intuitive Nutzung mächtiger Tools.
- Übertragen des graphischen Lösungsprinzips aus 2D in 3D.
- Systematisches Variieren, Finden der Sonderfälle.
- Keine Probleme durch Rechenfehler, da Rechenarbeit ausgelagert. Konzentration auf das hier Wesentliche.

### 5.3 Quadr. Funktionen: Scheitelpunktform

- Klassisch: Quadratische Ergänzung.

von der allg. Form  $f(x) = ax^2 + bx + c$  zur Scheitelform  $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ :

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 19$$

$$2\left(x^2 - \frac{12}{2}x\right) + 19 = 2(x^2 - 6x) + 19$$

$$2\left(x^2 + 2\left(-\frac{12}{4}\right)x\right) + 19 = 2(x^2 + 2(-3)x) + 19$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$2(x^2 + 2(-3)x + (-3)^2) + 19$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$2(x^2 + 2(-3)x + (-3)^2) + 19$$

$$2(x - 3)^2 + 19$$

$$2(x - 3)^2 + 1$$

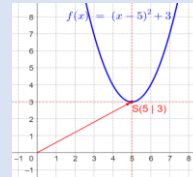
$$3(x - 3)^2 + 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x_0 = 3 \quad y_0 = 1$$

- Digitale Fundsache auf [www.GeoGebra.org](http://www.GeoGebra.org).
- Wo ist da der Unterschied digital – analog?

### 5.3 Quadr. Funktionen: Scheitelpunktform

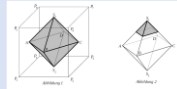


### 5.3 Quadr. Funktionen: Scheitelpunktform

- Klassisch: algebraisch, quadratische Ergänzung & binomische Formeln.
- Alternativ: Dynamische Visualisierung, graphischer Ansatz.
- Vom Kopf auf die Füße gestellt.
- Systematisches Variieren, Entdecken des Bildungsgesetzes.
- Mächtige Tools von GeoGebra nutzen.
- Auf die Nullstellen-Berechnung erweitern!

### 5.4 3D-Geometrie: Oktaeder

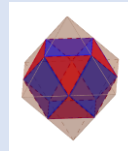
- „Oktaeder des Grauens“ im Zentralabitur NRW 2008



e) Von dem Oktaeder werden sechs Pyramiden mit dem gleichen Volumen  $V_p$  so abgeschnitten, dass jede Ecke des Oktaeders die Spitze einer Pyramide und die Grundfläche jeder abgeschnittenen Pyramide parallel zur gegenüberliegenden Würfelfläche ist (vgl. Aufgabenteil d)). Es entsteht ein Restkörper  $R_6$  ( $0 < a \leq \frac{1}{2}$ ).

Beschreiben Sie die Eigenschaften dieses Restkörpers  $R_6$  für  $a = \frac{1}{3}$  und  $a = \frac{1}{2}$  hinsichtlich der Anzahl und Eigenschaften seiner Seitenflächen. (8 Punkte)

### 5.4 3D-Geometrie: Oktaeder



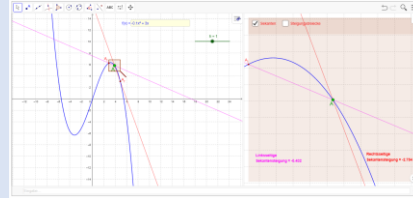
### 5.4 3D-Geometrie: Oktaeder

- Klassisch: ...? Weitgehend Fehlanzeige.
- Dynamische Visualisierung.
- Systematisches Variieren.
- Lernumgebung erstellen. Einblenden/ Ausblenden von Objekten.
- Im digitalen Modell kann man systematisch experimentieren, wie es real nicht möglich ist.
- Schulung der Raumvorstellung.

### 5.5 Analysis: Steigung, Funktionenlupe

- Klassischer Ansatz analytisch: Sekanten, Differenzenquotient, Grenzwert bilden.
- Regeln für Grundfunktionen und zusammengesetzte Funktionen herleiten.  
( $x^n$ )' =  $n \cdot x^{n-1}$ , ( $f(g(x))$ )' =  $g'(x) \cdot f'(g(x))$  usw.
- Kein graphischer Zugang.

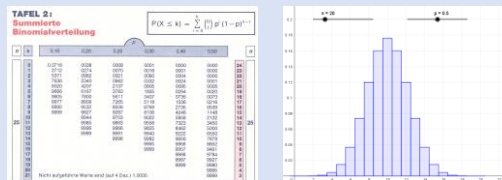
### 5.5 Analysis: Steigung, Funktionenlupe



### 5.5 Analysis: Steigung, Funktionenlupe

- Dynamische Visualisierung (Verallgemeinerung der Idee des Funktionenmikroskop von Kirsch).
- Systematisches Variieren.
- Fehlvorstellungen vorbeugen.
- Mächtige Tools von GeoGebra nutzen.
- Entlastung von längeren und fehleranfälligen Rechnungen („Rechennecht“).
- Konzentration auf das mathematisch Wesentliche.

### 5.6 Stochastik: Binomialverteilung



Analog: Tafelwerk mit ausgewählten einzelnen Werten

Digital: Gesamte Verteilung als Diagramm samt Kenngrößen.  
Einzelne Werte natürlich auch möglich.

### 5.6 Stochastik: Binomialverteilung

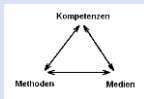
- Klassischer Ansatz: Einzelne Werte aus Tafelwerken.  
Modern aber immer noch klassisch: Rechnen mit TR/ GTR.
- Verteilungsfunktionen: mühsam, aufwändig.
- Daher gerne Approximation durch Normalverteilung.
- Alternativ: Direkt zu Verteilungen als solchen.

### 5.6 Stochastik: Binomialverteilung

- Dynamische Visualisierung.
- Systematisches Variieren, Entdecken.
- Mächtige Tools von GeoGebra nutzen.
- Die ganze Verteilung im Blick und als Objekt.
- Entlastung von längeren und fehleranfälligen Rechnungen („Rechennecht“), keine Beschränkung auf tabellierte Werte.
- Konzentration auf das mathematisch Wesentliche.



## VI. Methoden & Kompetenzen



### 6. E-I-S

Bruner: enaktiv – ikonisch – symbolisch.

- Repräsentationsmodi/ Aneignungsformen des Wissens
- E-I-S muss nicht in der Reihenfolge durchlaufen werden!
- Wichtig: Handlung und Bild so anlegen, dass man das „Symbolische anbahnen“ kann (Beispiel Innenwinkelsumme, Lotz 2021).
- Digitale Werkzeuge & Medien verbinden heute eng Enaktives und Ikonisches. C-E-I-S Modell (Hole, 1998).

### 6. Ich - Du - Wir (Think – Pair –Share)

Kooperatives Lernen nach Gallin & Ruf, strukturierte Gruppenarbeit

- Drei Phasen (Elschenbroich & Heintz, 2008)



- Mit und ohne digitale Werkzeuge sinnvoll. iPads werden dabei auch zur Dokumentation und Kommunikation wichtig.

### 6. Werkzeugkompetenzen

- Nicht nur Bedienkompetenz: „Werkzeugkompetenz bedeutet, mit Werkzeugen kompetent Mathematik zu betreiben.“ (Heintz, Elschenbroich et al, 2017)
- Auswahlkompetenz, Bedienkompetenz, Dokumentation & Reflektion, Entschleunigung, Zielgerichtetheit, dynamische Visualisierung, systematische Variation.

### 6. Lernkompetenzen

Fachübergreifende Kompetenzen:

- Strukturieren
  - Recherchieren
  - Kooperieren
  - Produzieren
  - Präsentieren
- (Elschenbroich, 2007)

Kompetenzmodell

(Elschenbroich & Heintz 2008)



## VII. Fazit

## 7 Fazit

### Immer wieder auftretend:

- Dynamische Visualisierung.
- Systematisches Variieren.
- Gesetzmäßigkeiten entdecken und Sonderfälle entdecken.
- Fehlvorstellungen vorbeugen.
- Entlastung von längeren und fehleranfälligen Rechnungen.
- Konzentration auf das mathematisch Wesentliche.

## 7 Fazit

Digitale Werkzeuge und **digitale Lernumgebungen** können

- Lernprozesse initiieren, unterstützen, fördern
- anschauliche geometrische Ansätze gegenüber Algebra- und Analysis-lastigen Ansätze unterstützen
- Anschauung fördern und unterstützen
- von Rechnungen entlasten und die Konzentration auf das Wesentliche fördern
- wichtige Themen (ggf. wieder) lebendig machen.

## 7. Fazit

- Nein, ich will keinen ‚Krieg gegen Lankau führen‘. Mir geht es darum, für das Fach Mathematik die fachlichen und fachdidaktischen Leerstellen zu füllen.
- Nein, es soll nicht „alles nur noch mit dem Computer gemacht werden“. Eine Entschleunigung und eine Verbindung mit Handlungsorientierung (Heintz 2016) ist jedoch wichtig.
- Der Computer ist an sich ein Verstärker: Richtig eingesetzt kann man mit ihm guten MU besser machen. Falsch eingesetzt kann er schlechten MU auch schlechter machen. „Auf den Lehrer kommt es an!“
- Wenn **neue Werkzeuge** entstehen, kann man sie nicht verhindern. Sinnvolles Herangehen: Aufgaben anpassen, **neue Aufgabekultur**.

## 7 Fazit

- Das heißt auch: Es braucht enorme Anstrengungen in die **Lehrer-Ausbildung und -Fortbildung!** Mindestens ein Drittel der DigitalPakt-Milliarden sollte in die ‚Human Resources‘ investiert werden, damit die Investitionen in Ausstattung nicht nur einen Haufen Elektroschrott produzieren!



## Kontakt

[elschenbroich@t-online.de](mailto:elschenbroich@t-online.de)

## Literatur

- Barzel, Bärbel (2016): Arbeiten mit CAS aus fachdidaktischer Perspektive. In: Heintz, G., Pinkernell, G. & Schacht, F. (Hrsg.): Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. MNU. S. 154 - 165
- Elschenbroich, H.-J.: Beiträge zur Digitalisierungsdiskussion. GeoGebra Book <https://www.geogebra.org/m/ldc3zheb>
- Elschenbroich, H.-J. (2019): Digitalisierung oder Digitalität? In: MNU Journal 5/2019. S. 256 - 257
- Elschenbroich, H.-J. (2016): Gedanken zum Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht. In: MNU Journal 6/2016. S. 370 - 374
- Elschenbroich, H.-J. (2011): Digitale Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht. In: Elschenbroich, H.-J. & Greefrath, G. (Hrsg.): Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeugen. MV-Wissenschaft, S. 8 - 10
- Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2011 - 2014): Geometrie entdecken! Mit GeoGebra. Teil 1 - 3. coTec (mittlerweile MasterFootshop)
- Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2018): Funktionen erkunden. Ideenreiche Arbeitsblätter mit GeoGebra. Friedrich Verlag.
- Elschenbroich, H.-J. & Heintz, G. (2008): Kompetenzen und Methoden. In: Elschenbroich, H.-J. & Heintz, G. (Hrsg.): Medien - Methoden - Kompetenzen. Der Mathematik-Unterricht 6/2008. Friedrich Verlag.
- Freudenthal, Hans (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe, Teil 1. Ernst Klett Verlag
- Heintz, G., Elschenbroich, H.-J., Laakmann, H., Langlotz, H., Rising, M., Schacht, F., Schmidt, R. & Tietz, C. (2017): Werkzeugkompetenzen. Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben. MNU, Verlag Medienstatt
- Heintz, G. (2016): Handlungsorientierung mit alten und neuen Werkzeugen. In: Heintz, G., Pinkernell, G. & Schacht, F. (Hrsg.): Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. MNU. S. 36 - 50
- Lankau, R. (2017): Kein Mensch lernt digital. Beltz