Ejercicios tipo Selectividad sobre probabilidad condicionada, Probabilidad Total y Teorema de Bayes

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	PROBABILIDAD	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

EJERCICIO 1

En población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es 1/12. Mientras que la probabilidad de ser mujer y daltónico es 1/25.

La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige al azar una persona.

a) Si la persona elegida es un hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.

b) Si la persona elegida es una mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida al azar sea daltónica?

a) Suceso A: ser hombre. Suceso $\bar{A}$: ser mujer.

Suceso B: ser daltónico. Suceso $\bar{B}$: no ser daltónico.

Probabilidad de ser hombre: $P(A) = 1/2$.

Probabilidad de ser mujer: $P(\bar{A}) = 1/2$.

Ser hombre y daltónico: $P(A \cap B) = 1/12$.

Ser mujer y daltónico: $P(\bar{A} \cap B) = 1/25$.

Buscamos la probabilidad de que una persona sea daltónica (B), sabiendo seguro que es un hombre (A): $P(B/A)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/12}{1/2} = 1/6$$

b) Ahora buscamos la probabilidad de que una persona sea daltónica (B), sabiendo seguro que es una mujer ($\bar{A}$): $P(B/\bar{A})$.

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{1/25}{1/2} = 2/25$$

c) La probabilidad de ser daltónico P(B) es la probabilidad de ser hombre y daltónico más la probabilidad de ser mujer y daltónico. Es decir:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 1/12 + 1/25 = 37/300$$

Más adelante, cuando hablemos del teorema de probabilidad total, podremos resolver este apartado con ayuda de ese teorema. Pero fíjate que ya sabemos resolverlo simplemente con los conceptos de probabilidad condicionada y probabilidad de la intersección.

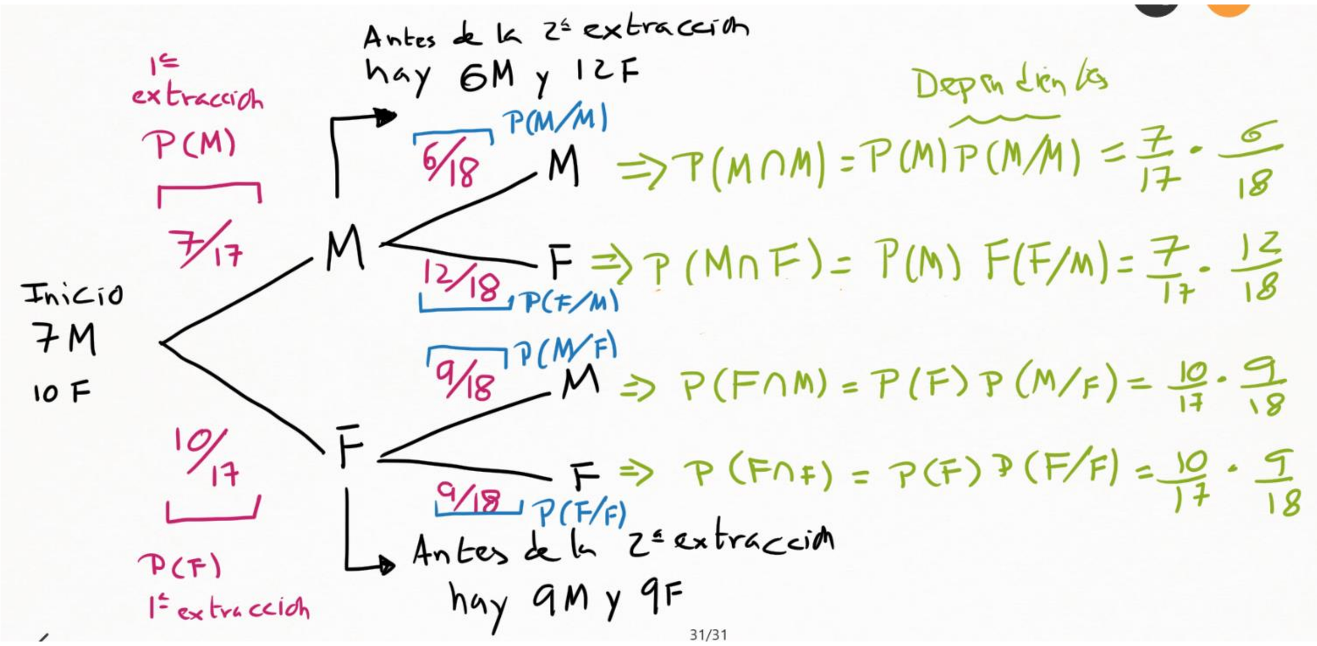
EJERCICIO 2

Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación, se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo extraído sea de fresa.

b) El segundo caramelo extraído sea del mismo sabor que el primero.

a) Para comprender mejor la extracción de los caramelos, vamos a realizar su diagrama de árbol asociado. Suceso sacar menta: M. Suceso sacar fresa: F.



La probabilidad de que la segunda extracción sea un caramelo de fresa P(F) será igual a la suma de las probabilidades de las dos ramas finales donde se termina extrayendo un caramelo de fresa (F). Es decir:

$$P(F) = P(M \cap F) + P(\mathrm{F} \cap F) = 7/17 \cdot 12/18 + 10/17 \cdot 9/18 = 29/51$$

b) La probabilidad de que el segundo caramelo extraído sea del mismo sabor que del primero, tenemos que sumar las probabilidades de las ramas donde coinciden los sabores de inicio y final. Es decir:

$$P(M \cap M) + P(\mathrm{F} \cap F) = 7/17 \cdot 6/18 + 10/17 \cdot 9/18 = 22/51$$

Como ves, haciendo el diagrama de árbol todo se simplifica mucho.

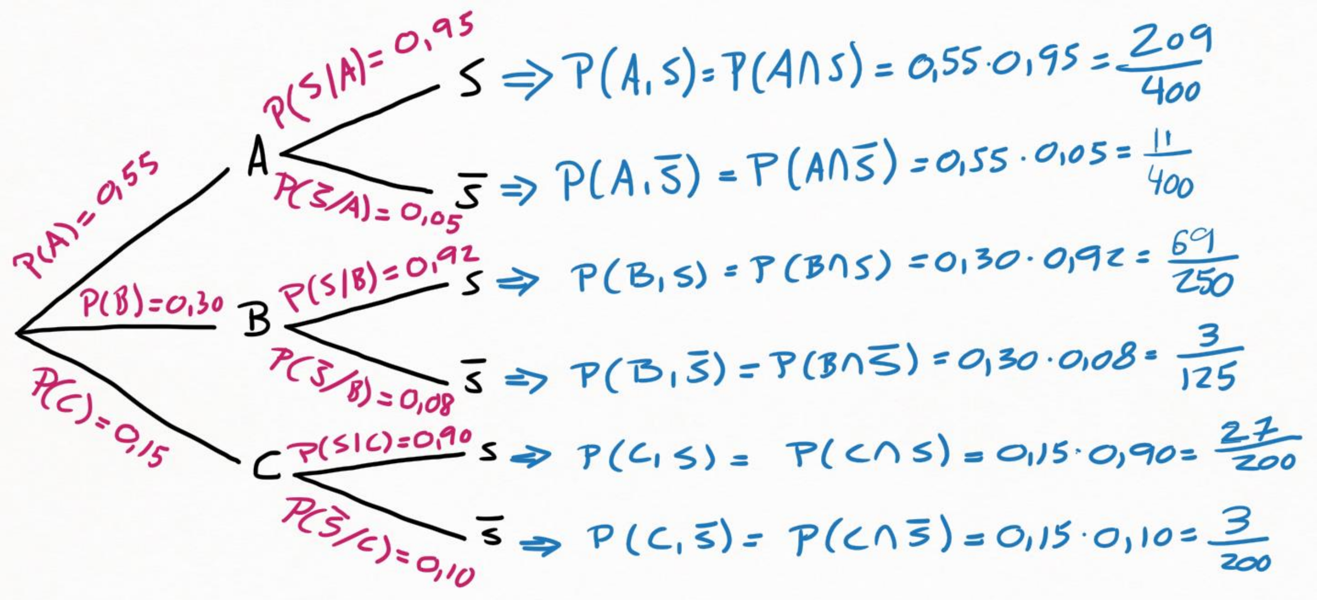
EJERCICIO 3

Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5% de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8% de los atendidos por el sastre B, ni el 10% de los atendidos por el sastre C. El 55% de los arreglos se encargan al sastre A, el 30% al B y el 15% restante al C. Calcular la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no queda satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A.

a) Nuevamente, el diagrama de árbol nos facilita mucho la vida. Tenemos tres sastres (A, B, C) y clientes satisfechos (S) o no satisfechos ($\bar{S}$).



No quedar satisfecho es la suma de las probabilidades de las tres ramas que terminan con el suceso $\bar{S}$.

$$P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(\mathrm{B} \cap \bar{S}) + P(C \cap \bar{S}) = 11/400 + 3/125 + 3/200 = 133/2000$$

b) Buscamos cliente atendido por el sastre (A), sabiendo seguro que no ha quedado satisfecho ($\bar{S}$). Es decir, buscamos la probabilidad condicionada $P(A/\bar{S})$. Y utilizaremos el dato calculado en el apartado a) sobre la probabilidad total de no quedar satisfecho ($P(\bar{S})$).

$$P(A/\bar{S}) = \frac{P(\bar{S} \cap A)}{P(\bar{S})} = \frac{11/400}{133/2000} = 55/133$$

EJERCICIO 4

El 69% de los habitantes de una ciudad ven series, el 35% películas y el 18% no ven series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) Calcula la probabilidad de que vea series o películas.

b) Sabiendo que ve series, calcula la probabilidad de que vea películas.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

a) Creamos la tabla de contingencia. Suceso ver serie: S. Suceso ver película: P. Suponemos los porcentajes como probabilidades, por la ley de los grandes números. **En negrita resalto los datos que directamente se obtienen de la lectura del enunciado**. El resto de las celdas se razonan a partir de los datos iniciales.

	S	$\bar{S}$	Totales
P	0,69 – 0,47 = 0,22	0,35 – 0,22 = 0,13	**0,35**
$\bar{P}$	0,65 – 0,18 = 0,47	**0,18**	1-0,35 = 0,65
Totales	**0,69**	1-0,69 = 0,31	**1**

Ver series o películas implica aplicar la unión de los dos sucesos:

$$P(S \cup P) = P(S) + P(P) - P(S \cap P)$$

Si recuerdas, la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades de cada suceso menos la probabilidad de la intersección. Mirando la tabla de contingencia:

$$P(S) = 0{,}69$$
$$P(P) = 0{,}35$$
$$P(S \cap P) = 0{,}22$$
$$P(S \cup P) = 0{,}69 + 0{,}35 - 0{,}22 = 0{,}82$$

b) Buscamos la probabilidad de encontrar una persona que de vea películas, sabiendo seguro que cumple que ve series. Buscamos la probabilidad condicionada $P(P/S)$.

$$P(P/S) = \frac{P(S \cap P)}{P(S)} = \frac{0{,}22}{0{,}69} = 0{,}32 \text{ (redondeando el segundo decimal)}$$

c) Probabilidad de ver series y no ver películas conlleva utilizar la intersección. Y las celdas de la tabla de contingencia nos da directamente las probabilidades de todas las intersecciones.

$$P(S \cap \bar{P}) = 0{,}47$$

En resumen. **Practica mucho cómo dibujar diagramas de árbol, cómo hacer tablas de contingencia y como pasar de una representación a otra, porque ayudan a resolver los ejercicios de probabilidad condicionada de manera muy sencilla**.

EJEMPLO 5

Sean A y B dos sucesos independientes tales que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es 1/3 y la de que no ocurra ninguno de ellos es 1/6. Calcula P(A) y P(B).

Los datos del enunciado afirman los siguiente:

- Sucesos independientes (no se condicionan): $P(A) = P(A/B)$ y $P(B) = P(B/A)$
- Ocurre A y B: $P(A \cap B) = 1/3$
- No ocurre A y no ocurre B: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1/6$

En probabilidad condicionada, sabemos que:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$\frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B)$$

Igualmente:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}/\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$
$$\frac{1}{6} = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

La probabilidad de un suceso y su complementario suman 1. Es decir:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \;\rightarrow\; P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(B) + P(\bar{B}) = 1 \;\rightarrow\; P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$

Sustituimos estas dos relaciones en las primeras dos ecuaciones:

$$\frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B)$$
$$\frac{1}{6} = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))$$

En la primera ecuación podemos despejar el valor de una de las probabilidades:

$$\frac{1}{3 \cdot P(B)} = P(A)$$

Y llevamos esta relación a la segunda ecuación:

$$\frac{1}{6} = (1 - \frac{1}{3 \cdot P(B)}) \cdot (1 - P(B))$$

Llegamos a una ecuación con una sola incógnita. Operamos:

$$\frac{1}{6} = (\frac{3 \cdot P(B) - 1}{3 \cdot P(B)}) \cdot (1 - P(B))$$
$$\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot P(B) = (3 \cdot P(B) - 1) \cdot (1 - P(B))$$
$$\frac{P(B)}{2} = 3 \cdot P(B) - 3 \cdot [P(B)]^2 - 1 + P(B)$$
$$3 \cdot [P(B)]^2 - \frac{7}{2} P(B) + 1 = 0$$
$$6 \cdot [P(B)]^2 - 7P(B) + 2 = 0$$

Quedando una ecuación de segundo grado, por soluciones:

$$P(B) = 2/3$$
$$P(B) = 1/2$$

Usamos las dos soluciones para la solución del suceso A.

Si $P(B) = 2/3$ → $P(A) = \frac{1}{3 \cdot P(B)}$ → $P(A) = \frac{1}{2}$

Si $P(B) = 1/2$ → $P(A) = \frac{1}{3 \cdot P(B)}$ → $P(A) = \frac{2}{3}$

Las soluciones son cruzadas. Es decir, si la probabilidad de un suceso vale 2/3 la del otro suceso vale 1/2. Y viceversa.

Es fácil comprobar que estas soluciones satisfacen las condiciones del enunciado.

EJEMPLO 6

Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que P(A)=1/9, P(B)=1/2 y P(AUB)=13/18, se pide:

a) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) Calcular $P(\bar{A}/B)$, donde $\bar{A}$ es el suceso complementario de A.

a) Si dos sucesos son independientes, se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

En cambio, si son dependientes, aparece una probabilidad condicionada. Y la ecuación anterior quedaría:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Que también se puede expresar como:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Los datos del enunciado dan la probabilidad de A, la probabilidad de B y la probabilidad de la unión. De estos datos, podemos sacar la probabilidad de intersección.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$$

Sustituimos los datos del enunciado:

$$13/18 = 1/9 + 1/2 + P(A \cap B)$$

$$\frac{13}{18} - \frac{1}{9} - \frac{1}{2} = P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{9}$$

Es directo comprobar que:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

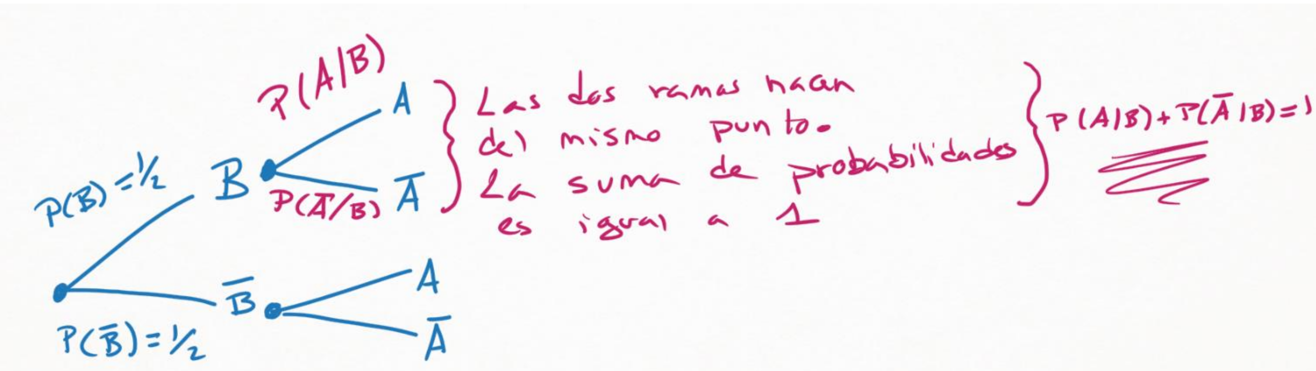
Este resultado no coincide con el valor $P(A \cap B) = \frac{1}{9}$ antes calculado. Por lo tanto, los sucesos no son independientes.

b) En probabilidad condicionada sabemos que:

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$

Conocemos el valor del denominador de esta expresión: P(B)=1/2. Pero no conocemos el numerador.

¿Cómo razonar? Nuevamente, con la idea de que un suceso y su complementario deben sumar una probabilidad igual a 1. Esto se ve fácilmente con un diagrama de árbol, donde primero distinguimos entre el suceso B y su complementario.



Es decir:

$$P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$$

La primera probabilidad condicionada sí podemos calcularla con los datos del apartado anterior.

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} + P(\bar{A}/B) = 1$$

$$\frac{1/9}{1/2} + P(\bar{A}/B) = 1$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - 2/9$$

$$P(\bar{A}/B) = \frac{7}{9}$$

EJEMPLO 7

Se tienen dos urnas A y B con bolas de colores con la siguiente composición: la urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas; mientras que la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras.

Además, se tiene un dado con 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que ha indicado el dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea verde?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?

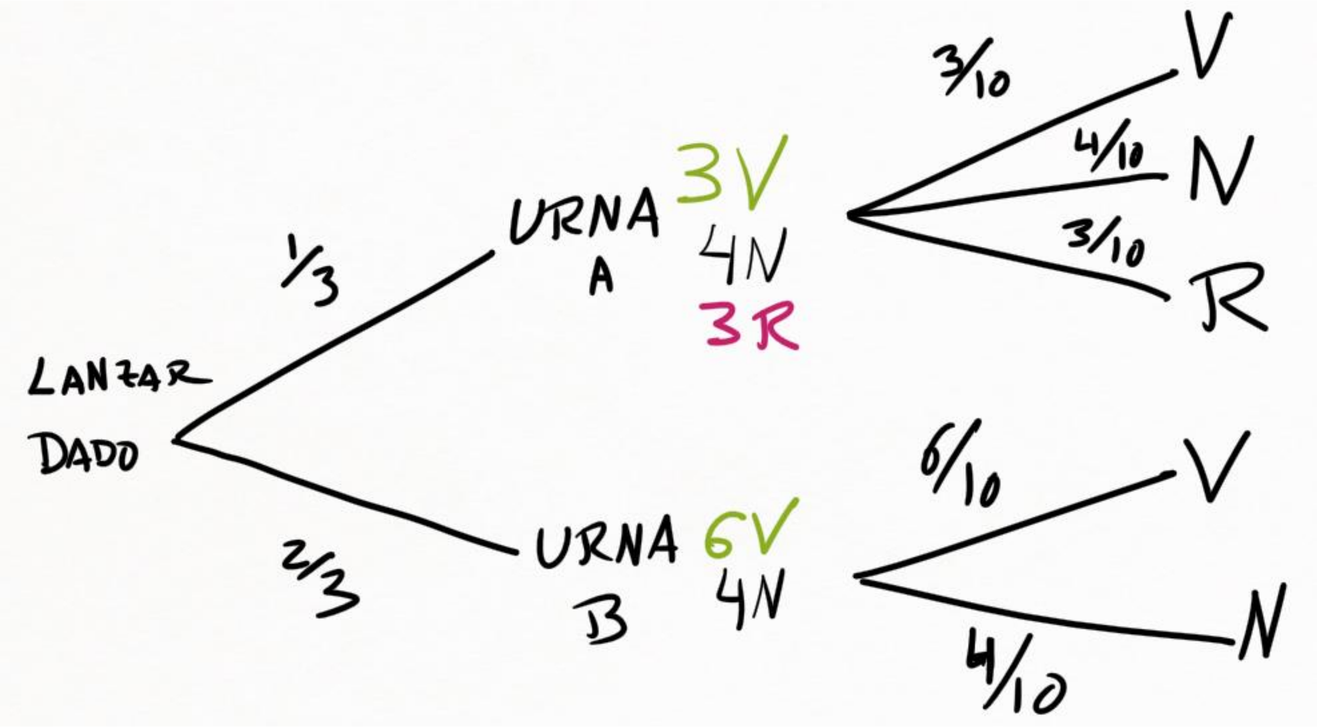
c) Si la bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que ésta proceda de la urna B?

a) La extracción de las bolas está condicionada al resultado del dado. Por lo tanto, al aparecer claramente probabilidades condicionadas, es muy cómodo dibujar un diagrama de árbol.

El primer suceso sería lanzar el dado (para escoger urna A o urna B). Mientras que el segundo suceso sería extraer una bola, según la urna seleccionada por el dado.

El dado tiene 2 caras con la letra A. La probabilidad de elegir la urna A es 2/6, es decir, 1/3.

El dado tiene 4 caras con la letra B. La probabilidad de elegir la urna B es 4/6, es decir, 2/3.



El diagrama de árbol genera cinco caminos.

La bola extraída en verde en el camino primero y en el quinto. Por lo que sumamos la probabilidad de esos dos caminos.

$$P(A\ y\ Verde) + P(B\ y\ Verde) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} + \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

b) El único camino que lleva a extraer la bola es el tercero.

$$P(A\ y\ Rojo) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

c) De todos los caminos que llevan a la bola verde, nos quedamos solo con la que viene de la urna B. Es lo que llamaremos más adelante el Teorema de Bayes. Pero podemos razonarlo sin necesidad de apelar a este Teorema.

$$\frac{numerador}{denominador} = \frac{casos\ favorables: scar\ \ Verde\ si\ viene\ de\ la\ urna\ B}{casos\ totales: probabilidad\ total\ de\ sacar\ Verde}$$

$$P(Urna\ B/Verde) = \frac{P(B\ y\ Verde)}{P(A\ y\ Verde) + P(B\ y\ Verde)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

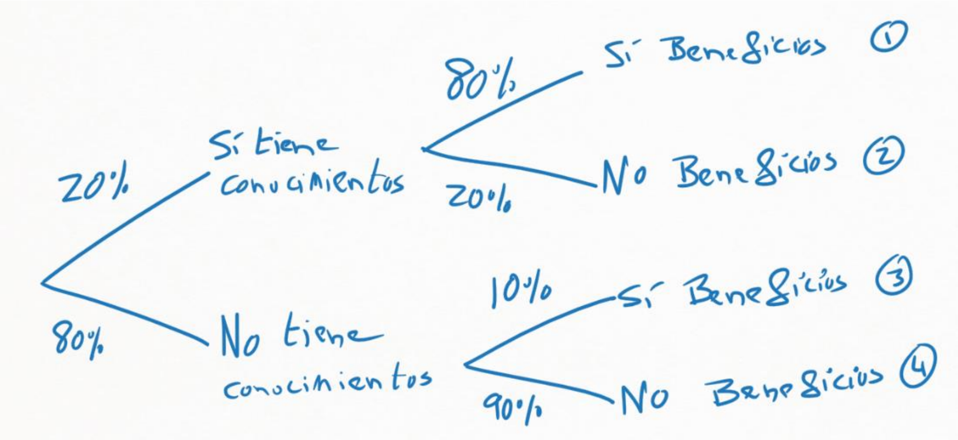
EJEMPLO 8

Se estima que solo un 20% de los que compran acciones en bolsa tienen conocimientos bursátiles. De ellos, el 80% obtiene beneficios. De los que compran acciones sin conocimientos bursátiles, solo un 10% obtiene beneficios.

a) Calcula el porcentaje de los que obtienen beneficios comprando acciones en bolsa.

b) Eligiendo una persona al azar, calcula la probabilidad de que no tenga conocimientos bursátiles y que no tenga beneficios al invertir en bolsa.

a) Obtener beneficios dependen de si el comprador tiene o no conocimientos en bolsa. Estos es una probabilidad condicionada. Optamos por dibujar un diagrama de árbol, con todas las opciones.



De los cuatro caminos del diagrama de árbol, se obtienen beneficios en el camino 1 y en el camino 3. Debemos sumar las probabilidades de cada camino. Es decir, nos preguntan por la probabilidad total de obtener beneficios.

La probabilidad de un camino se obtiene multiplicando las probabilidades de las ramas que lo forman.

$$P(Sí\ Beneficios) = P(Sí\ conocimientos\ y\ Sí\ Beneficios) + P(No\ conocimientos\ y\ Sí\ Beneficios)$$

$$P(Sí\ Beneficios) = 0{,}20 \times 0{,}80 + 0{,}80 \times 0{,}10 = 0{,}24$$

La probabilidad es del 24%.

b) Este apartado representa el camino 4 del diagrama de árbol. La persona no tiene conocimientos en bolsa y la persona no obtiene beneficios. Multiplicamos la probabilidades de cada rama.

$$P(No\ conocimientos\ y\ No\ beneficios) = 0{,}80 \times 0{,}90 = 0{,}72$$

EJERCICIO 9

El 65% de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75% de los turistas que se hospedan en la capital y el 15% de los que se hospedan en zonas rurales lo hace en hoteles, mientras que el resto lo hace en apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en la provincia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) Si se sabe que el turista se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

a) Si consideramos los porcentajes como probabilidades (ley de los grandes números) los datos del enunciado son:

- P(capital) = 0,65
- P(rural) = 1 – 0,65 = 0,35
- P(hotel/capital) = 0,75 → Probabilidad condicionada: sabiendo que se hospeda seguro en la capital, cuál es la probabilidad de que esté en un hotel.
- P(hotel/rural) = 0,15 → Probabilidad condicionada: sabiendo que se hospeda seguro en zona rural, cuál es la probabilidad de que esté en un hotel.

Los sucesos “capital” y “rural” forman un espacio completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas. Juntos forman todo el espacio muestral de los turistas que se alojan en la provincia.

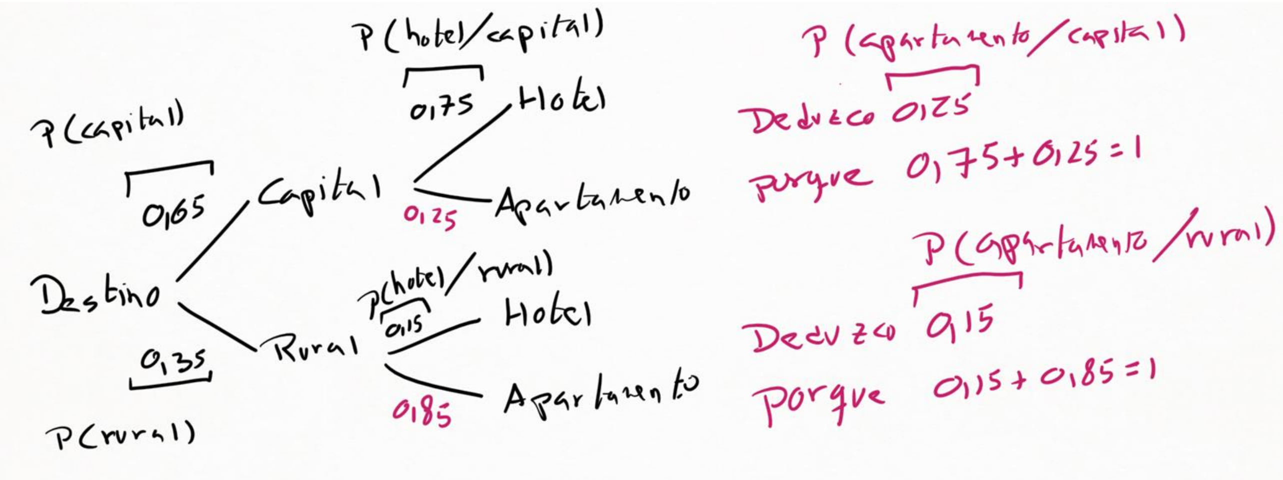
Por lo tanto, para obtener la probabilidad total de encontrarse un turista en un hotel podemos usar el Teorema de Probabilidad Total:

P(hotel) = P(capital)·P(hotel/capital) + P(rural)·P(hotel/rural)

P(hotel) = 0,65·0,75 + 0,35·0,15 = 0,54

También podemos resolver el ejercicio dibujando un diagrama de árbol y sumando las probabilidades de las dos ramas que dan lugar a un alojamiento en hotel.

El diagrama de árbol, además, nos vendrá bien para el siguiente apartado, donde tendremos que razonar los valores de probabilidades condicionadas que no da el enunciado directamente.



En rojo, en el diagrama de árbol, aparece la probabilidad condicionada de alojarse en apartamento, habiendo elegido seguro la capital. Y la probabilidad condicionada de alojarse en apartamento, habiendo elegido seguro zona rural. Estos valores se deducen del hecho de que las probabilidades de todas las ramas de un diagrama de árbol que nacen de un mismo punto deben sumar 1.

La probabilidad total de alojarse en un hotel será la suma de las probabilidades de las ramas que terminan en el suceso "hotel":

$$P(hotel) = P(capital \cap hotel) + P(rural \cap hotel) = 0{,}65 \cdot 0{,}75 + 0{,}35 \cdot 0{,}15 = 0{,}54$$

b) En este apartado nos preguntan por la siguiente probabilidad condicionada:

P(rural/apartamento) → Sabiendo seguro que se encuentra en apartamento turístico, saber qué probabilidad hay de que se encuentre en zona rural.

Podemos resolverlo por Teorema de Bayes, ya que tenemos información de las siguientes probabilidades condicionadas (razonadas en el diagrama de árbol):

- P(hotel/capital) = 0,75 → P(apartamento/capital) = 0,25 (ambos suman 1)
- P(hotel/rural) = 0,15 → P(apartamento/rural) = 0,85 (ambos suman 1)

$$P(rural/apartamento) = \frac{P(rural) \cdot P(apartamento/rural)}{P(rural) \cdot P(apartamento/rural) + P(capital) \cdot P(apartamento/capital)}$$

$$P(rural/apartamento) = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}85}{0{,}35 \cdot 0{,}85 + 0{,}65 \cdot 0{,}25} = 0{,}6467$$

Como ya sabemos, podemos obtener este dato trabajando con el diagrama de árbol. La suma de las probabilidades de todos los casos posibles de alojarse seguro en un apartamento es:

$$P(capital \cap apartamento) + P(rural \cap apartamento) = 0{,}65 \cdot 0{,}25 + 0{,}35 \cdot 0{,}85$$

Y de esas dos opciones solo queremos quedarnos con la opción de alojarse en zona rural:

$$P(rural/apartamento) = \frac{P(rural \cap apartamento)}{P(capital \cap apartamento) + P(rural \cap apartamento)} = 0{,}6467$$

EJERCICIO 10

Una cooperativa envasa zumos de naranja, zumos de piñas y zumos de melocotón en botellas de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60% de las botellas son de zumo de naranja y el 30% de piña. Además, el 80% de las botellas de zumo de naranja y el 70% de los zumos de piña son de 2 litros, mientras que el 60% de las botellas de melocotón son botellas de 1 litro.

Se elige al azar una botella envasada por la cooperativa.

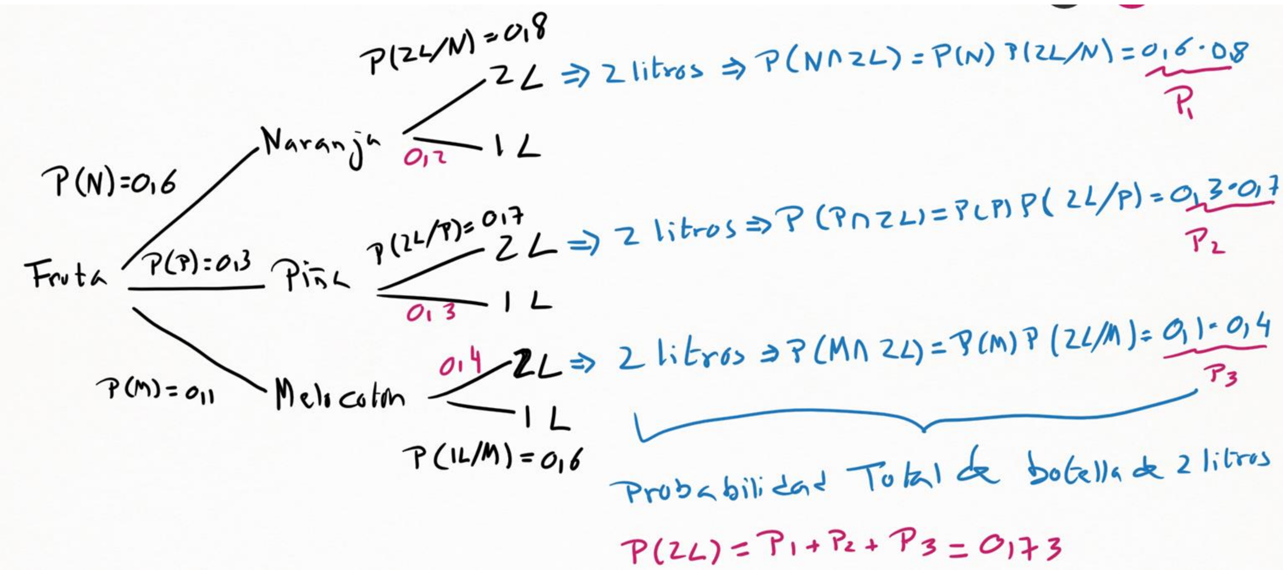
a) Calcula la probabilidad de que la botella sea de 2 litros.

b) Calcula la probabilidad de que el zumo sea de naranja, sabiendo que la botella es de 2 litros.

c) Calcula la probabilidad de que el zumo sea de melocotón, sabiendo que la botella es de 1 litro.

a) Tenemos muchos datos en el enunciado. Recomiendo dibujar, en estos casos con tanta información, un diagrama de árbol para organizar visualmente la información.

El nudo inicial se bifurca en los tres tipos de fruta: naranja (N), piña (P) y melocotón (M). Y tras elegir la fruta, los nudos distinguen en el tipo de envase: 2 litros y 1 litro.



Podemos usar el Teorema de Probabilidad total, o bien razonar a partir del diagrama de árbol. Esta segunda opción, personalmente, me gusta más por ser más fácil de razonar y no tanto de memorizar.

La suma de las probabilidades de las tres ramas que dan lugar a las botellas de 2 litros nos ofrece la probabilidad total de elegir una botella de 2 litros:

P(2 litros) = 0,6·0,8 + 0,3·07 + 0,1·0,4 = 0,73

b) El siguiente apartado afirma que, si tenemos seguro una botella de 2 litros, que probabilidad hay de que sea de naranja.

Podemos aplicar Teorema de Bayes, o bien razonar a partir del diagrama de árbol. Vamos a resolverlo por Bayes.

Del apartado a) ya tenemos la probabilidad total de que la botella sea de 2 litros, considerando las tres frutas. Esa probabilidad total es el denominador del Teorema de

Bayes. En el numerador deberemos considerar la probabilidad de que la botella sea de naranja y de dos litros. Es decir:

$$P(N/2\mathrm{L}) = \frac{P(N) \cdot P(2\mathrm{L}/N)}{P(N) \cdot P(2\mathrm{L}/N) + P(P) \cdot P(2\mathrm{L}/P) + P(M) \cdot P(2\mathrm{L}/M)}$$

$$P(N/2L) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}8}{0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}4} = 0{,}6575$$

c) Este apartado es exactamente igual al apartado b), solo que en el diagrama de árbol debemos considerar las ramas que dan lugar a las botellas de 1 litro.

$$P(M/1\mathrm{L}) = \frac{P(M) \cdot P(1\mathrm{L}/M)}{P(N) \cdot P(1\mathrm{L}/N) + P(P) \cdot P(1\mathrm{L}/P) + P(M) \cdot P(1\mathrm{L}/M)}$$

$$P(M/1L) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}6}{0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}6} = 0{,}22\ldots$$

EJEMPLO 11

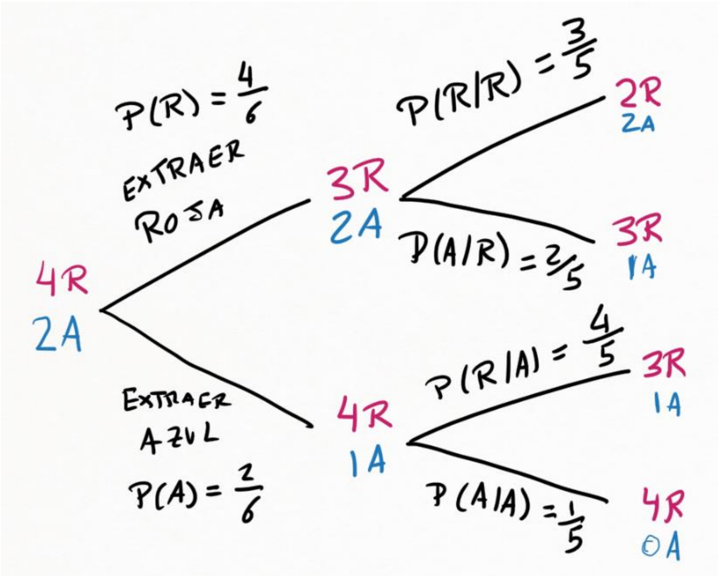
De una urna que contiene cuatro bolas rojas y dos azules, extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea azul?

c) Si la segunda bola es azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea roja?

a) Estamos en un ejercicio donde la probabilidad de la segunda extracción depende de lo que se ha obtenido en la primera extracción. Hablamos de probabilidades condicionadas. Por lo que un diagrama de árbol es muy cómodo.



Al final del diagrama de árbol encontramos cuatro caminos distintos.

En el primer camino, extraemos Rojo y Rojo.

En el segundo camino, Rojo y Azul.

En el tercer camino, Azul y Rojo.

En el cuarto camino, Azul y Azul.

Por lo tanto, el camino segundo y el camino cuarto son los que generan bolas de distinto color tras dos extracciones. Deberemos sumar las probabilidades de esos dos caminos.

$$P(Rojo\ y\ Azul) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P(Azul\ y\ Rojo) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

La suma de ambas probabilidades da lugar a 8/15.

b) Si la segunda bola es azul, debemos considerar el camino segundo y el camino cuarto.

$$P(Rojo\ y\ Azul) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P(Azul\ y\ Azul) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

La suma de ambas probabilidades resulta 5/15 que, simplificado, es 1/3.

c) En el tercer apartado podemos aplicar Teorema de Probabilidad Total o, lo que es lo mismo, razonar de la siguiente forma: de todas las opciones donde la segunda bola es azul, me quedo solo con aquella donde la primera sea roja.

$$\frac{casos\ favorables}{casos\ totales} = \frac{siendo\ la\ segunda\ azul, la\ primera\ debe\ ser\ roja}{segunda\ bola\ azul}$$

En los casos totales (denominador) consideramos el camino segundo y el camino cuarto: probabilidad total de tener azul en la segunda extracción.

En los casos favorables (numerador) solo contabilizamos el camino segundo, ya que que genera que la primera bola sea roja (si la segunda es azul).

$$P(primero\ Rojo\ /\ segunda\ Azul) = \frac{P(Rojo \cap Azul)}{P(Azul)}$$

$$P(primero\ Rojo\ /\ segunda\ Azul) = \frac{\frac{4}{6} \times \frac{2}{5}}{\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15} + \frac{1}{15}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

EJEMPLO 12

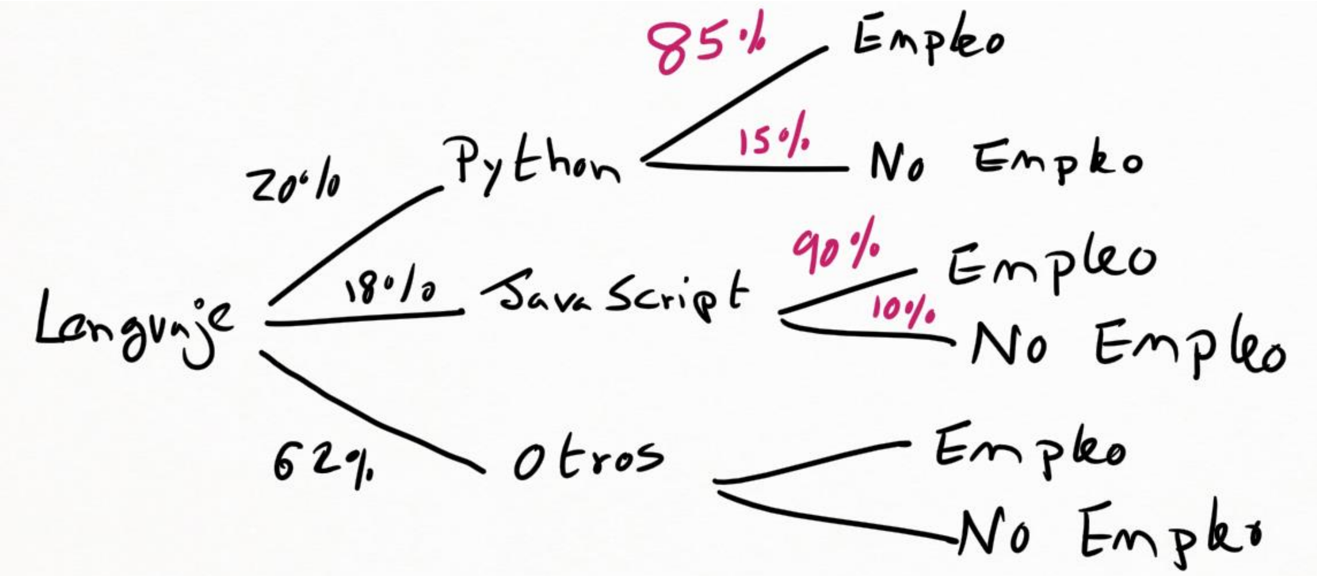
Python y JavaScript se encuentran entre los lenguajes de programación más estudiados por los programadores, con un 20% y un 18% de desarrolladores que se especializan únicamente en cada uno de ellos. El resto de desarrolladores se especializan entre una decena de lenguajes (HTML-CSS, Java, C,…). La probabilidad de que un desarrollador que se ha especializado en Python obtenga empleo es 0,85, mientras que la de que lo obtenga uno que se ha especializado en JavaScript es 0,9. También se sabe que la probabilidad de que un desarrollador esté desempleado es del 0,15.

a) Calcula la probabilidad de que un desarrollador esté empleado si no ha estudiado Python ni JavaScript.

b) Calcula la probabilidad de que un desarrollador que está desempleado se haya especializado en Python o JavaScript.

a) En el siguiente diagrama de árbol distinguimos, en primer lugar, entre lenguaje Python, lenguaje JavaScript y otro lenguaje.

En segundo lugar, distinguiremos en si encuentra empleo o no.



El enunciado informa de la probabilidad total de no encontrar trabajo. Esta probabilidad total es la suma de la probabilidad del segundo camino, del cuarto y del sexto del diagrama de árbol de arriba.

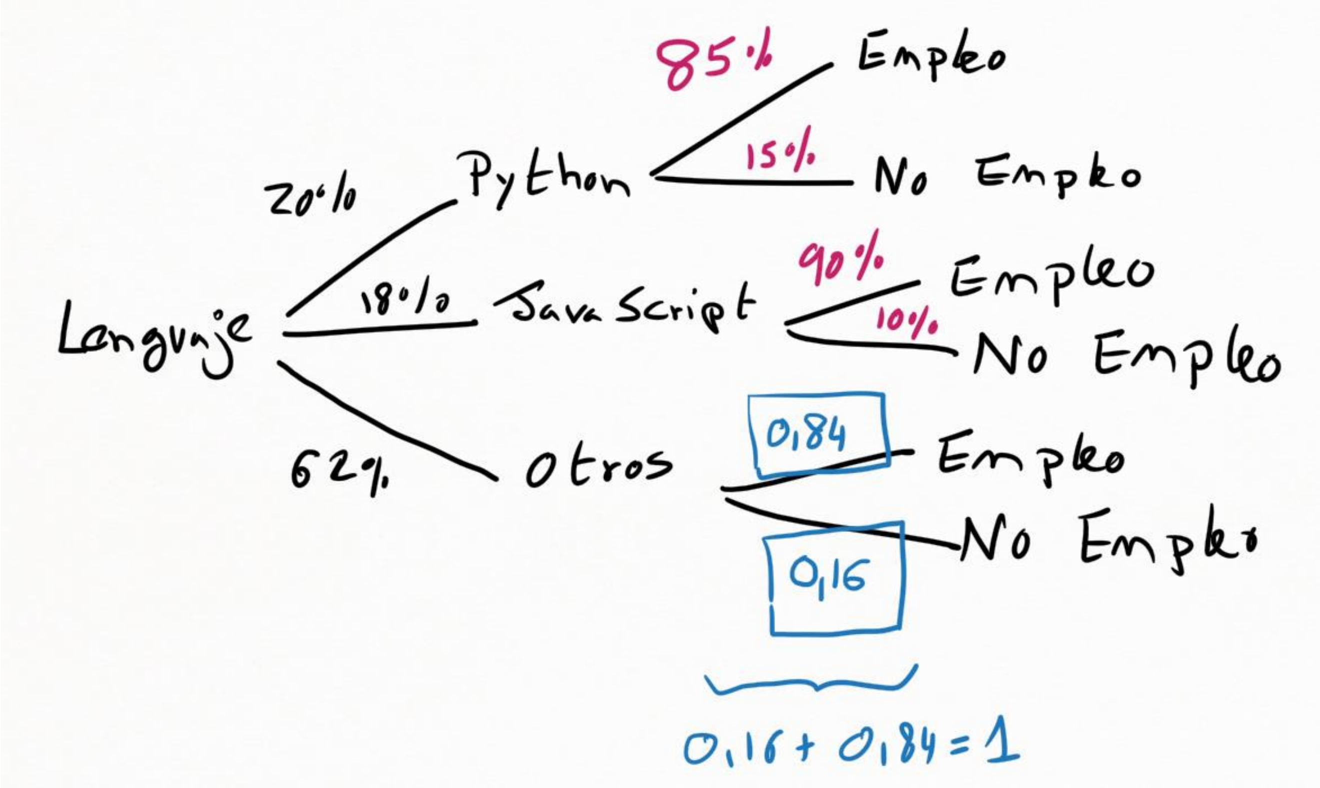
$$P(Python\ y\ No\ Empleo) + P(JavaScript\ y\ No\ Empleo) + P(Otros\ y\ No\ Empleo) = 0{,}15$$

La probabilidad de cada camino es el producto de las probabilidades de las ramas que lo forman.

$$0{,}20 \times 0{,}15 + 0{,}18 \times 0{,}10 + 0{,}62 \times P(No\ Empleo/Otros) = 0{,}15$$

$$P(No\ Empleo/Otros) = 0{,}16$$

Con este dato podemos completar la información que falta en el diagrama de árbol:



Por lo tanto, la probabilidad de estar empleado si ha estudiado "Otros lenguaje de programación" es:

$$P(Empleo/Otros) = 0{,}84 = 84\%$$

b) Este apartado nos pide elegir, de todos los programadores que no tienen empleo, a los que se especializaron en Python o JavaScript.

$$\frac{casos\ favorables}{casos\ totales} = \frac{P(Python\ y\ No\ empleo) + P(JavaScript\ y\ No\ empleo)}{probabilidad\ total\ No\ empleo}$$

$$\frac{casos\ favorables}{casos\ totales} = \frac{0{,}20 \times 0{,}15 + 0{,}18 \times 0{,}10}{0{,}15} = 0{,}32$$

La probabilidad es del 32%.

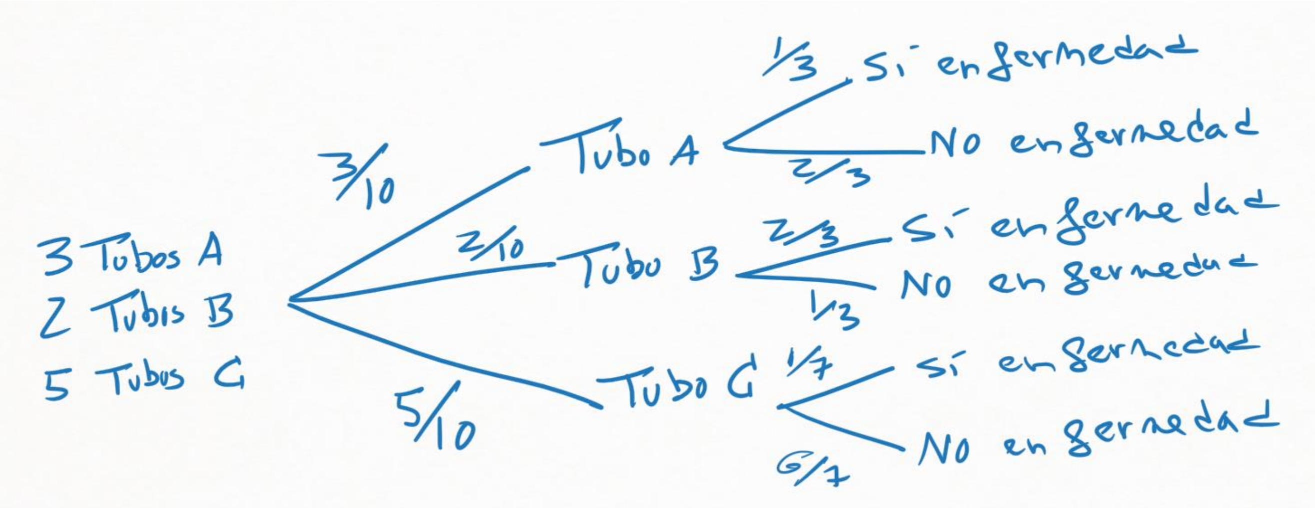
EJEMPLO 13

Una enfermedad puede estar producida por tres virus A, B y C. En el laboratorio hay tres tubos de ensayo con el virus A, 2 tubos de ensayo con el virus B y 5 tubos de ensayo con el virus C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad en un animal es de 1/3, que la produzca el virus B es de 2/3, y que la produzca el virus C es de 1/7.

a) Si elegimos al azar un tubo de ensayo e inoculamos el virus a un animal, calcula la probabilidad de que contraiga la enfermedad.

b) Si se inocula el virus a un animal y contrae la enfermedad, calcula la probabilidad de que el virus que se ha inoculado sea del tipo C.

a) Al aparecer claramente probabilidades condicionadas, optamos por un diagrama de árbol. Ya que la capacidad de contagiar depende del tipo de virus seleccionado.



Buscamos la probabilidad total de que el animal tenga la enfermedad. Eso es la suma de las probabilidades de los tres caminos que terminan en "Sí enfermedad".

Ya sabemos que la probabilidad de cada camino se obtiene multiplicando la probabilidad de cada una de la ramas que lo forman.

$$P(Sí\ enfermedad) = P(A\ y\ Sí\ enfermedad) + P(B\ y\ Sí\ enfermedad) + P(C\ y\ Sí\ enfermedad)$$

$$P(Sí\ enfermedad) = \frac{3}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{10}\times\frac{2}{3}+\frac{5}{10}\times\frac{1}{7}=\frac{32}{105}$$

b) El apartado b) es un típico ejemplo de Teorema de Bayes. Sabiendo seguro que el animal tiene la enfermedad, cuál es la probabilidad de que el tubo sea el C.

Podemos aplicar el razonamiento de Bayes, o bien razonar de la siguiente forma (que me parece más intuitiva): de todos los caminos que terminan en enfermedad (casos totales), me quedo solo con el camino que sale del tubo C (casos favorables).

$$P(C\ /\ Sí\ enfermedad) = \frac{P(C\ \cap Sí\ enfermedad)}{P(Sí\ enfermedad)} = \frac{\frac{5}{10}\times\frac{1}{7}}{\frac{32}{105}} = \frac{\frac{5}{70}}{\frac{32}{105}} = \frac{15}{64}$$

EJEMPLO 14

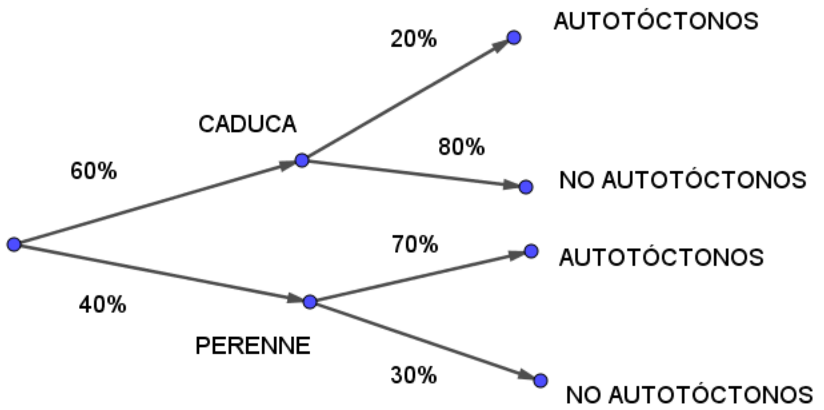
Un ayuntamiento estima que el 60% de los árboles de su localidad son de hoja caduca, y de ellos un 20% son autóctonos del área geográfica. Sin embargo, de los árboles de hoja perenne (no caduca) los autóctonos ascienden al 70 %. Elegido al azar un árbol de esta localidad:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de hoja caduca y no sea autóctono?

b) ¿Qué probabilidad hay de que el árbol sea autóctono?

c) Sabiendo que el árbol es autóctono, ¿cuál es la probabilidad de que sea de hoja caduca?

a) Dibujamos el diagrama de árbol. Inicialmente, distinguimos entre hoja caduca (60%) y hoja perenne (40%).



Dentro de los árboles de hoja caduca, el 20% son autóctonos y el 80% no son autóctonos.

En los árboles de hoja perenne, el 70% son autóctonos y el 30% no son autóctonos.

La probabilidad de caduca y autóctono es una intersección, donde aparece una probabilidad condicionada:

$$P(caduca\ y\ autóctono) = P(caduca) \cdot P(autóctono/caduca)$$

$$P(caduca\ y\ autóctono) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48 \rightarrow 48\%$$

Esta probabilidad se puede obtener, directamente, multiplicando las probabilidades de la dos ramas del camino que pasa por hoja caduca y árbol autóctono.

b) La probabilidad total de ser autóctono es una probabilidad total:

$$P(autóctono) = P(caduca\ y\ autóctono) + P(perenne\ y\ autóctono)$$

$$P(autóctono) = P(caduca) \cdot P(autóctono/caduca) + P(perenne) \cdot P(autóctono/perenne)$$

$$P(autóctono) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}12 + 0{,}28 = 0{,}40 \rightarrow 40\%$$

Mirando el diagrama de árbol, esta probabilidad es la suma de los dos caminos que terminan en árbol autóctono.

c) De todos los árboles que son autóctonos, deseamos quedarnos solo con los que también sean de hoja caduca. Estamos en una aplicación del Teorema de Bayes:

$$P(caduca/autóctonos) = \frac{P(caduca\ y\ autóctonos)}{P(autóctonos)}$$

$$P(caduca/autóctonos) = \frac{P(caduca\ y\ autóctonos)}{P(autóctonos)}$$

El numerador lo hemos obtenido en el apartado a). El denominador es el resultado del apartado b).

$$P(caduca/autóctonos) = \frac{0,12}{0,40} = 0,3 \rightarrow 30\%$$

Mirando el diagrama de árbol, el Teorema de Bayes es una aplicación de la regla de Laplace: casos favorables dividido entre casos totales. En el numerador ponemos la probabilidad de la rama que pasa por caduca y autóctonos (casos favorables) y el denominador escribimos la suma de probabilidades de los dos caminos que terminan en autóctonos (casos totales).

EJEMPLO 15

Se tiene una prueba diagnóstica para una enfermedad con las siguientes propiedades:

- La probabilidad de que el test dé positivo teniendo la enfermedad es 0,95.

- La probabilidad de que el test dé negativo no teniendo la enfermedad es 0,95.

- La probabilidad de que una persona tenga la enfermedad es 0,05.

Realizada la prueba a una persona al azar, calcular:

a) La probabilidad de que el test dé positivo.

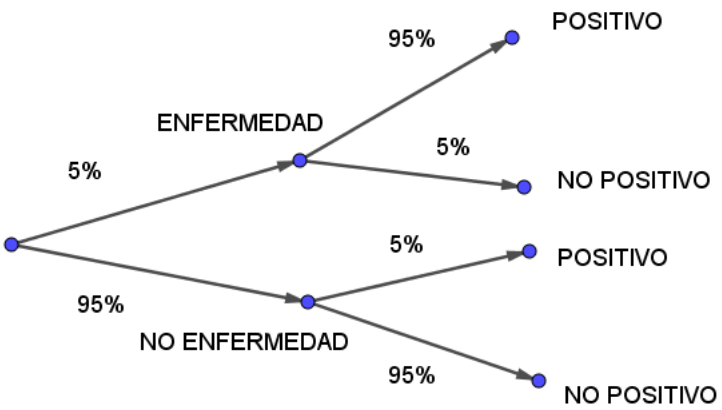
b) La probabilidad de tener la enfermedad cuando el test ha dado positivo.

Planteamos el diagrama de árbol.

La probabilidad de dar positivo, condicionado a tener la enfermedad, es p(positivo/enfermedad)=0.95.

La probabilidad de dar negativo, condicionado a no tener la enfermedad, es p(negativo/no enfermedad)=0.95.

Y la probabilidad total de tener la enfermedad es p(enfermedad)=0.05.



a) La probabilidad de dar positivo es la suma de las probabilidades de los dos caminos que terminan en "positivo". También se podría usar la fórmula de probabilidad total.

$$p(positivo) = p(enfermedad\ y\ positivo) + p(no\ enfermedad\ y\ positivo)$$

$$p(positivo) = 0.95 \times 0.95 + 0.95 \times 0.05 = 0.95 \rightarrow 95\%$$

b) La probabilidad de tener la enfermedad, sabiendo seguro que ha dado positivo, implica considerar de todos los casos positivos solo aquellos que cumplen tener enfermedad y dar positivo. También se puede razonar con Teorema de Bayes.

$$p(\ enfermedad/positivo) = \frac{p(enfermedad\ y\ positivo)}{p(positivo)}$$

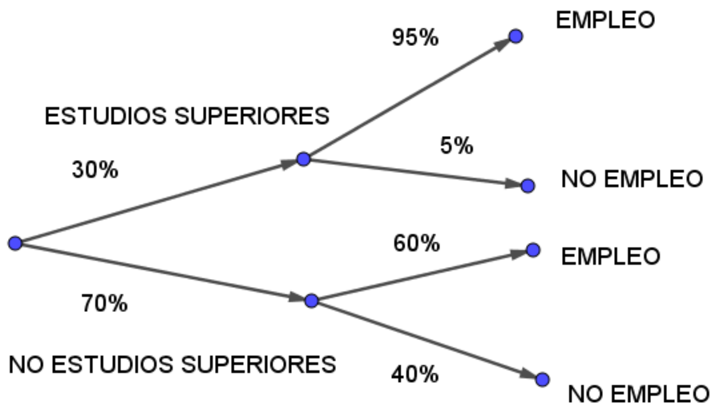
$$p(\ enfermedad/positivo) = \frac{0.95 \times 0.95}{0.95 \times 0.95 + 0.95 \times 0.05} = 0.95 \rightarrow 95\%$$

EJEMPLO 16

Se sabe que el 30% de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95% tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60% tiene empleo.

a) Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.

b) Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.



a) La probabilidad total de tener empleo es la suma de las probabilidades de los caminos que terminan en "empleo".

$$p(empleo) = p(estudios\ superiores\ y\ empleo) + p(no\ estudios\ superiores\ y\ empleo)$$
$$p(empleo) = 0.3 \times 0.95 + 0.7 \times 0.6 = 0.705 \rightarrow 70{,}5\%$$

b) La probabilidad de tener estudios superiores, sabiendo seguro que tiene empleo, implica considerar de todos los casos que tienen empleo solo aquellos que cumplen tener estudios superiores y empleo.

$$p(\ estudios\ superiores/empleo) = \frac{p(estudios\ superiores\ y\ empleo)}{p(empleo)}$$
$$p(\ estudios\ superiores/empleo) = \frac{0.3 \times 0.95}{0.705} = 0{,}4043 \rightarrow 40{,}43\%$$

EJEMPLO 17

Se estudia una prueba diagnóstica para detectar una enfermedad en un grupo de 200.000 personas a las que se ha sometido a dicha prueba y de los que el 0,5% están enfermos.

Se ha observado que de los enfermos ha dado negativo a 50 personas y, de las sanas, le ha dado positivo a 19.900. Si se escoge al azar una de estas persona sometidas a la prueba diagnóstica:

a) Calcula la probabilidad de que la prueba dé resultado positivo

b) ¿Cuál sería la probabilidad de que el resultado de la prueba sea erróneo?

c) Calcula la probabilidad de que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba es negativo.

Planteamos la tabla de contingencia. En la tabla, en negro aparecen los datos que ofrece el enunciado. Y en rojo, los datos que deducimos operando.

	Enfermo (A)	No enfermo ($\bar{A}$)	Totales
Prueba positiva (B)	10.000 – 50 = 9.950	19.900	9.950 + 19.900 = 29.850
Prueba negativa ($\bar{B}$)	50	190.000 – 19.900 = 170.100	170.100 + 50 = 170.150
Totales	5% de 200.000 = 10.000	200.000 – 10.000 = 190.000	200.000

a) Mirando la tabla de contingencia, la probabilidad de prueba positiva se resuelve por regla de Laplace (casos favorables entre casos totales).

$$p(prueba\ positiva) = \frac{29.850}{200.000} = 0{,}1493 \rightarrow 14{,}93\%$$

b) El error se produce cuando una persona enferma recibe prueba negativa (50 personas) y cuando una persona sana recibe prueba positiva (19.900 personas).

$$p(error) = \frac{50 + 19.900}{200.000} = 0{,}0998 \rightarrow 9{,}98\%$$

c) La probabilidad de padecer la enfermedad, sabiendo seguro que la prueba es negativo se obtiene con probabilidad condicionada:

$$p(enfermedad/prueba\ negativa) = \frac{p(enfermedad\ y\ prueba\ negativa)}{p(prueba\ negativa)}$$

El numerador de la fracción es la probabilidad de una intersección (enfermedad y prueba negativa), y se obtiene de la celda donde coinciden ambos sucesos.

El denominador es la probabilidad total de prueba negativa.

Ambos casos se obtienen con la regla de Laplace.

$$p(enfermedad\ y\ prueba\ negativa) = \frac{50}{200.000}$$

$$p(prueba\ negativa) = \frac{170.150}{200.000}$$

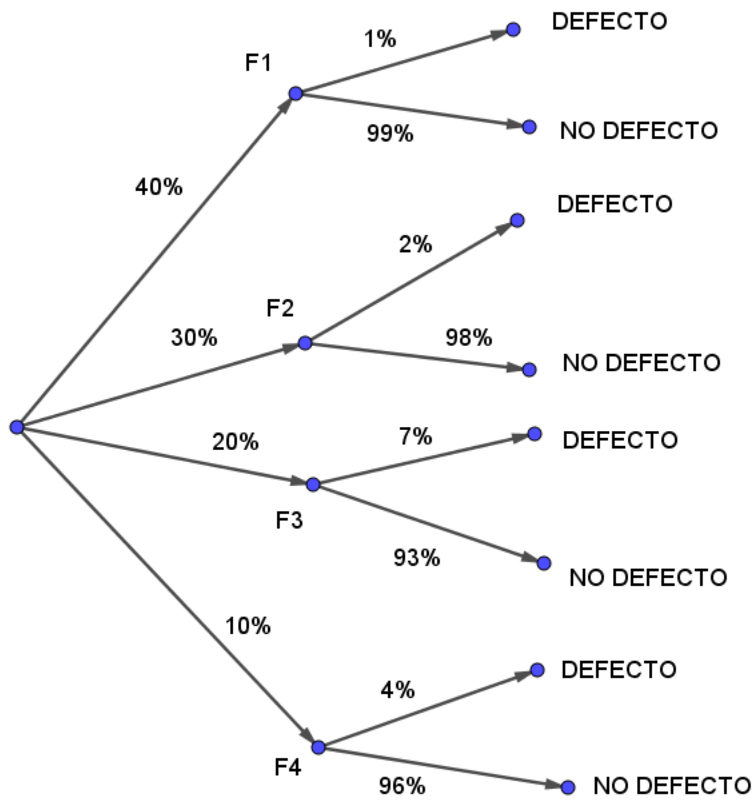
$$p(enfermedad/prueba\ negativa) = \frac{50}{170.150} = 0{,}000294 \rightarrow 0{,}0294\%$$

EJEMPLO 18

Una empresa automovilística fabrica sus coches en cuatro factorías: F1, F2, F3 y F4. El porcentaje de producción total de coches que se fabrica en cada factoría es del 40%, 30%, 20% y 10%, respectivamente, y además el porcentaje de pintado defectuoso en cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4%, respectivamente. Tomamos un coche al azar. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el coche haya sido fabricado en la factoría F1 y esté perfecto?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la pintura del coche presente algún desperfecto?



a) Estar fabricado en F1 y no tener defecto es el producto de las ramas del camino que pasa por "F1" y por "no defecto".

$$p(F1\ y\ no\ defecto) = 0.4 \times 0.99 = 0{,}396 \rightarrow 39{,}6\%$$

b) La probabilidad de no tener defecto es la suma de las probabilidades de los cuatro caminos que terminan en "defecto".

$$p(defecto) = p(F1\ y\ defecto) + p(F2\ y\ defecto) + p(F3\ y\ defecto) + p(F4\ y\ defecto)$$

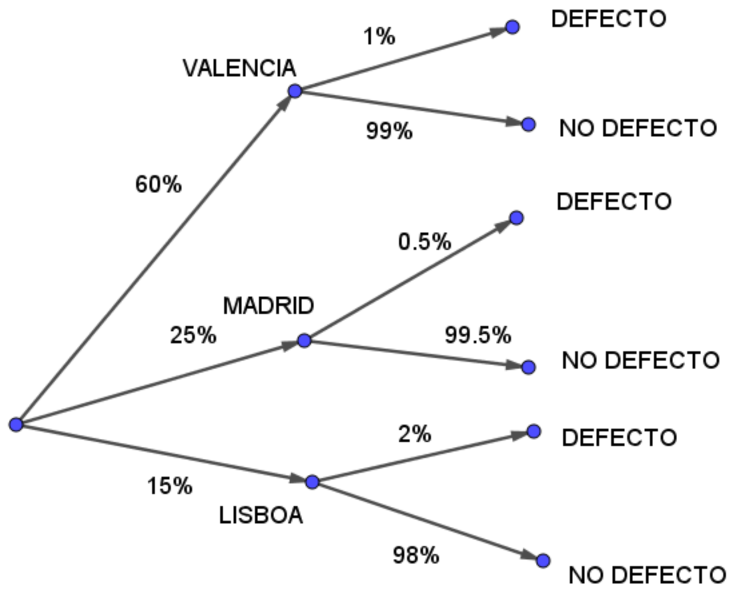
$$p(defecto) = 0.4 \times 0.01 + 0.3 \times 0.02 + 0.2 \times 0.07 + 0.1 \times 0.04 = 0.025 \rightarrow 2{,}5\%$$

EJEMPLO 19

El 60% de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25% en Madrid y el resto en Lisboa. El 1% de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa estos porcentajes son del 0,5% y del 2 %, respectivamente.

a) Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?



a) La probabilidad de no tener defecto es la suma de las probabilidades de los tres caminos que terminan en "no defecto".

$$p(defecto) = p(Valencia\ y\ no\ defecto) + p(Madrid\ y\ no\ defecto) + p(Lisboa\ y\ no\ defecto)$$

$$p(defecto) = 0.6 \times 0.01 + 0.25 \times 0.005 + 0.15 \times 0.02 = 0.0102 \rightarrow 1{,}02\%$$

b) Sabiendo seguro que el coche es defectuoso, la probabilidad de ser fabricado en Madrid implica considerar de todos los coches defectuosos solo los que cumplen ser de Madrid y defectuosos.

$$p(Madrid/defecto) = \frac{p(Madrid\ y\ defecto)}{p(defecto)}$$

$$p(Madrid/defecto) = \frac{0.25 \times 0.005}{0.0102} = 0.1225 \rightarrow 12{,}25\%$$

EJEMPLO 20

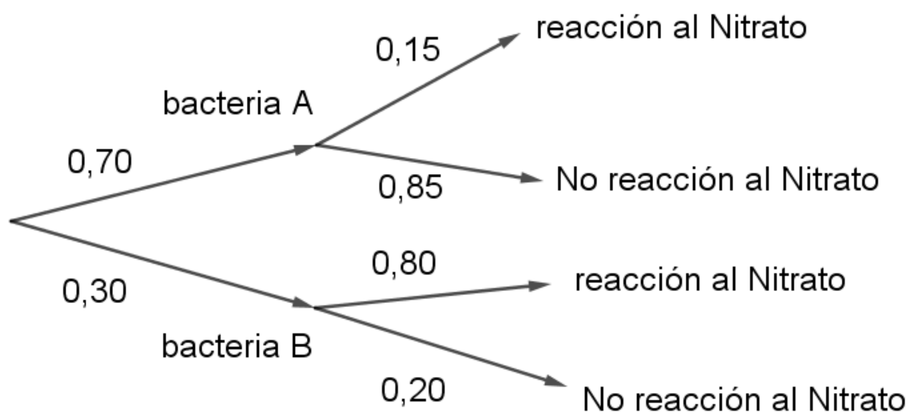
En una determinada muestra de suelo se han aislado dos tipos de bacterias, A y B, de las cuales el 70% son de A y el 30% de B. La probabilidad de que una bacteria de tipo A reaccione a la prueba del nitrato es 0'15 y para la bacteria B es 0'8. De las bacterias aisladas se selecciona una al azar.

a) Calcule la probabilidad de que reaccione a la prueba del nitrato.

b) Si la bacteria ha reaccionado a la prueba del nitrato, calcule la probabilidad de que sea del tipo B.

c) Calcule la probabilidad de que la bacteria sea del tipo A y no reaccione a la prueba del nitrato.

a) El enunciado ofrece los datos de probabilidades condicionadas, por lo que dibujamos el siguiente diagrama de árbol.



La probabilidad total de reaccionar al nitrato es:

$$P(nitrato) = P(A) \cdot P(nitrato \,/\, A) + \; P(B) \cdot P(nitrato \,/\, B)$$

$$P(nitrato) = 0{,}70 \cdot 0{,}15 + \; 0{,}30 \cdot 0{,}80 = 0{,}345$$

Donde bacteria A y bacteria B son dos sucesos incompatibles (sin elementos en común)

b) Sabiendo seguro que la bacteria ha reaccionado al nitrato, la probabilidad de ser del tipo B es la probabilidad condicionada P(B/nitrato).

Aplicamos Teorema de Bayes, para elegir de todo los casos en los que hay reacción con el nitrato solo aquellos casos que también cumplan venir de la bacteria B.

$$P(B/nitrato) = \frac{P(B \cap nitrato)}{P(nitrato)}$$

El denominador es la probabilidad total de reaccionar al nitrato (apartado anterior).

El numerador es el camino del diagrama de árbol que engloba a la bacteria B y a reaccionar con nitrato (producto de las probabilidades de esas dos ramas).

$$P(B/nitrato) = \frac{0{,}30 \times 0{,}80}{0{,}345} \approx 0{,}6957$$

c) La probabilidad de que la bacteria sea A y no reaccione al nitrato es el producto de las probabilidades de las ramas que engloban ambos sucesos.

$$P(A \;\cap No\, nitrato) = P(A) \cdot P(No\, nitrato \,/\, A)$$

$$P(A \;\cap No\, nitrato) = 0{,}70 \cdot 0{,}85 = 0{,}595$$

EJEMPLO 21

Una determinada ciudad tiene en la plantilla del ayuntamiento 1000 agentes de la policía local, 600 bomberos y 400 funcionarios de protección civil. En esta plantilla, el 42% de policías, el 20% de bomberos y el 50% de funcionarios de protección civil son mujeres. Se elige una persona al azar de la plantilla.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) Si la persona elegida es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea bombero?

a) El total de policías, bomberos y protección civil es de 2.000 personas. El porcentaje de cada cuerpo es el siguiente:

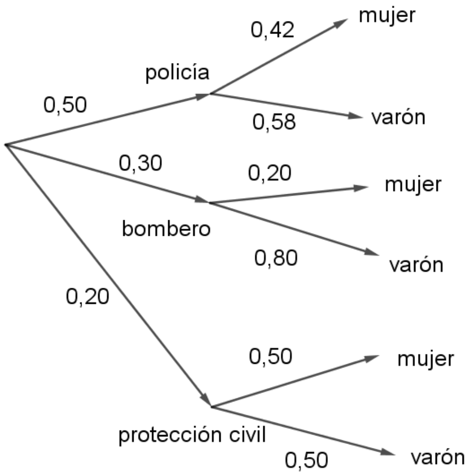
1000/2000 policía local (50%)

600/2000 bomberos (30%)

400/2000 protección civil (20%).

Asumiendo la ley de los grandes números, ya tenemos las probabilidades de elegir a una persona al azar y saber si es policía, bombero o miembro de protección civil.

El enunciado, además, nos da probabilidades condicionados (porcentaje de mujeres según el cuerpo de seguridad). Por lo que es práctico trabajar con un diagrama de árbol.



a) La probabilidad total de ser mujer se puede obtener con el Teorema de Probabilidad Total, ya que ser policía, ser bombero y ser protección civil son sucesos incompatibles cuya unión forma todo el espacio muestral:

$$P(mujer) = P(policía) \cdot P(mujer\ /\ policía) + P(bombero) \cdot P(mujer\ /\ bombero) + P(civil) \cdot P(mujer\ /\ civil)$$

$$P(mujer) = 0{,}50 \cdot 0{,}42 + 0{,}3 \cdot 0{,}20 + 0{,}20 \cdot 0{,}50$$

$$P(mujer) = 0{,}37 = 37\%$$

b) Sabiendo seguro que es hombre, la probabilidad de ser bombero se obtiene por el Teorema de Bayes. De todos los hombres (casos totales) solo elegimos aquellos que además son bomberos (casos favorables).

$$P(bombero\ varón) = \frac{P(bombero\ \cap varón)}{P(varón)}$$

En el numerador tenemos la probabilidad de una intersección, que es igual al producto de probabilidades de las ramas que engloban a bombero y ser varón.

En el denominador tenemos la probabilidad total de ser varón, que podemos obtenerla como 1 – P(mujer). Y el valor de P(mujer) es el que calculamos en el apartado anterior.

$$P(bombero\ /\ varón) = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}80}{1 - 0{,}37} = 0{,}380952 \approx 38{,}10\%$$

EJEMPLO 22

Una librería tiene tres estanterías: superior, central e inferior.

En la estantería superior hay 3 novelas y 7 cuentos.

En la estantería central hay 8 novelas y 6 cuentos.

En la estantería inferior hay 5 novelas y 9 cuentos.

Se escoge un estante al azar y se saca de él un libro. Si resulta que es una novela, ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado del estante central?

Forma 1: con el Teorema de Bayes

Los sucesos estantería Superior (S), Central (C) e Inferior (I) son incompatibles dos a dos. No tienen elementos en común. Todos albergan al menos una novela, por lo que la probabilidad asociada a cada estantería es no nula. La unión de las tres estanterías genera todas las novelas existentes.

Por lo tanto, estamos ante un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos. Podemos aplicar, en consecuencia, el Teorema de Bayes.

$$P(C/N) = \frac{P(C) \cdot P(N/C)}{P(S) \cdot P(N/S) + P(C) \cdot P(N/C) + P(I) \cdot P(N/I)}$$

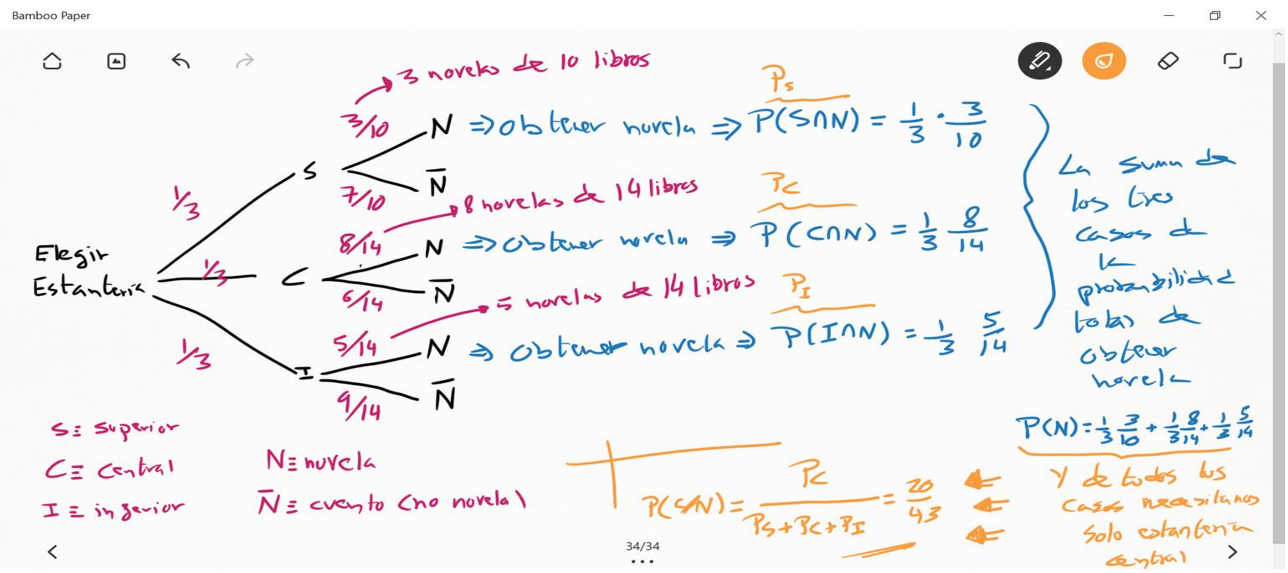
- P(C/N): probabilidad buscada. Sabiendo que es una novela (N), ¿qué probabilidad hay de que venga de la estantería central (C)?
- P(S) = P(C) = P(I) = 1/3 → Probabilidad de elegir cada estantería (equiprobables).
- P(N/S) = 3/10 → En la estantería superior hay 10 libros, de los cuales 3 son novelas.
- P(N/C) = 8/14 = 4/7 → En la estantería central hay 14 libros, de los cuales 8 son novelas.
- P(N/I) = 5/14 → En la estantería inferior hay 14 libros, de los cuales 5 son novelas.

$$P(C/N) = \frac{1/3 \cdot 4/7}{1/3 \cdot 3/10 + 1/3 \cdot 4/7 + 1/3 \cdot 5/14} = 20/43$$

Forma 2: usando diagrama de árbol y dividir el caso favorable entre todos los casos factibles

La novela puede venir de la estantería Superior, Central o Inferior. Por lo que la probabilidad condicional que buscamos es la probabilidad de que venga de la estantería central dividido por la suma de las tres probabilidades de las tres estanterías.

El siguiente diagrama de árbol muestra todos los cálculos.



La probabilidad total de obtener una novela será la suma de las probabilidades de obtener la novela de cada una de las estanterías: $P(S \cap N) + P(C \cap N) + P(I \cap N)$.

De esas tres opciones, debemos elegir solo la probabilidad asociada a que la novela pertenezca a la estantería central: $P(C \cap N)$.

Por lo tanto, la probabilidad de escoger una obra de la estantería central y que seguro sea novela será:

$$P(C/N) = \frac{P(C \cap N)}{P(S \cap N) + P(C \cap N) + P(I \cap N)} = 20/43$$

Una vez más, el diagrama de árbol permite resolver el ejercicio sin tener que recurrir al Teorema de Bayes. ¡Viva el diagrama de árbol!