NEFROIDA – ČÁST 1

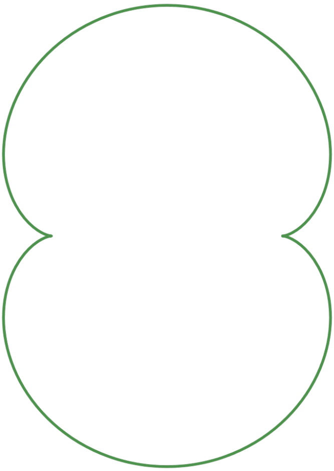
Nefroida jakožto epicykloida

Žán Pól Kastról

20. listopadu 2022

1 Vo co de

Nefroida je křivka, která má podobu **ledviny** (viz obr. 1a). Proč je zajímavá? Například proto, že se objevuje jakožto *kaustika* při odrazu paprsků od kulového (či válcového) zrcátka, které jsou rovnoběžné s optickou osou (viz obr. 1b). A to nás fascinuje!



(a) Nefroida – z řeckého *nephros* – ledvina; v angličtině *nephroid*.

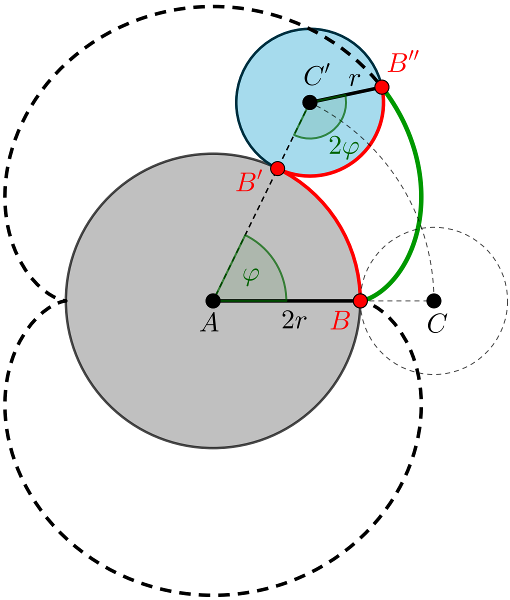
(b) Kaustika při dopadu světla na válcovou obrubu hodin.

Obr. 1

Dá se vygenerovat vícero způsoby[1]. Zde se zaměříme na vznik *nefroidy* jakožto trajektorie bodu kružnice o poloměru r, která se odvaluje (bez prokluzování) po obvodu další kružnice s poloměrem $2r$ – tedy jakožto *epicykloidy*[2] a odvodíme její **parametrické vyjádření**.

Pohleďmež na obrázek 2 a pusťme si také aplet (viz odkaz v popisu obrázku), který odvalování animuje.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Nephroid
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Epicycloid



Obr. 2: Vznik nefroidy odvalováním kružnice po kružnici.

https://www.geogebra.org/m/fthudh3v

Po šedivé kružnici se středem A a poloměrem $2r$ se bez prokluzování odvaluje modrá kružnice, která má poloviční poloměr r.

Počáteční poloha odvalované kružnice je vyznačena čárkovaně – její střed leží v bodě C a kružnice se dotýká šedivé kružnice v bodě B. Bod B se pohybuje po zelené trajektorii – části nefroidy – do bodu B''.

Protože se jedná o odvalování bez prokluzování, jsou délky červených oblouků na obou kružnicích stejně dlouhé. Středový úhel příslušející červenému oblouku BB' označíme φ. Protože poloměr modré kružnice je poloviční než poloměr šedé, musí být středový úhel příslušející červenému oblouku $B'B''$ dvakrát větší[3], tedy 2φ.

Rozklad pohybu

Skutečný pohyb bodu B po zelené trajektorii do bodu B'' můžeme rozklad rozložit na dva pohyby:

1. Rotace bodu B se středem A po červeném oblouku šedé kružnice o úhel φ do bodu B'. Bod C rotuje obdobně do bodu C'. (Fysikálně to odpovídá situaci, kdy modrá kružnice klouže po šedivé a neodvaluje se.)

2. Rotace bodu B' se středem C' po červeném oblouku modré kružnice o úhel 2φ do bodu B''. (Modrá kružnice rotuje kolem již nehybného bodu C')

Tento rozklad složitého pohybu po nefroidě na dva jednoduché rotační pohyby nám umožní snadno nalézt **parametrické vyjádření nefroidy**. Za tím účelem si nejprve připomeneme něco z analytické geometrie a teorie komplexních čísel.

Translace

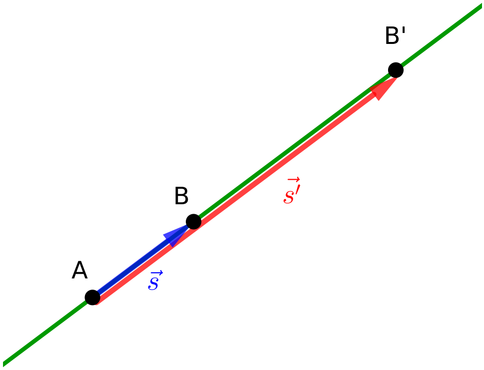
Když chceme v analytické geometrii **natáhnout** či **stlačit** vektor $\vec{s}$, stačí ho násobit nějakou konkrétní *reálnou konstantou* k (viz obr. 3):

$$\vec{s'} = k \cdot \vec{s}$$

To můžeme zapsat pomocí koncových a počátečních bodů takto

$$\boxed{(B' - A) = k \cdot (B - A)} \tag{1}$$

[3]Vzpomeňme na vzorec pro délku kruhového oblouku $s = \varphi r \rightarrow$ „ES JE FÍR“!



Obr. 3:

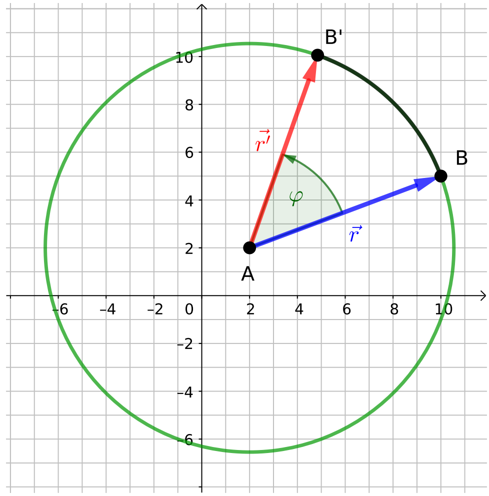
https://www.geogebra.org/m/tgcxxxje

Toto natažení či stlačení vektoru znamená současně **translaci** bodu B do bodu B' ve směru vektorové přímky vektoru $\vec{s}$:

$$\boxed{B' = A + k \cdot (B - A)} \tag{2}$$

Bude-li k probíhat množinu všech reálných čísel, vyplní body B' celou vektorovou přímku vektoru $\vec{s}$. Tím dostáváme **prametrické vyjádření přímky**:

$$\boxed{X = A + k \cdot \underbrace{(B - A)}_{\vec{s}};\ k \in R} \tag{3}$$



Obr. 4:

https://www.geogebra.org/m/r9fdpmgt

Rotace

Když chceme, aby nějaký vektor $\vec{r}$ **rotoval** o úhel φ, je vhodné využít komplexní čísla a násobit tento vektor *komplexní jednotkou*:

$$\vec{r'} = (\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot \vec{r}$$

Komplexní jednotku je vele-výhodné vyjádřit (jak velí Eulerův vzorec[4]) ve tvaru

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

Tedy

$$\vec{r'} = e^{i\varphi} \cdot \vec{r}$$

[4] (viz https://www.geogebra.org/m/xvzhkdbs)

To můžeme zapsat pomocí koncových a počátečních bodů takto (viz obr. 4)

$$\boxed{(B' - A) = (B - A) \cdot e^{i\varphi}} \tag{4}$$

Body A, B, B' zde považujeme za komplexní čísla. Tato rotace vektoru znamená současně **rotaci bodu B do bodu B' o úhel φ kolem středu A**:

$$\boxed{B' = A + (B - A) \cdot e^{i\varphi}} \tag{5}$$

Pokud střed rotace A bude ležet v počátku, dostaneme jednoduše

$$\boxed{B' = B \cdot e^{i\varphi}} \tag{6}$$

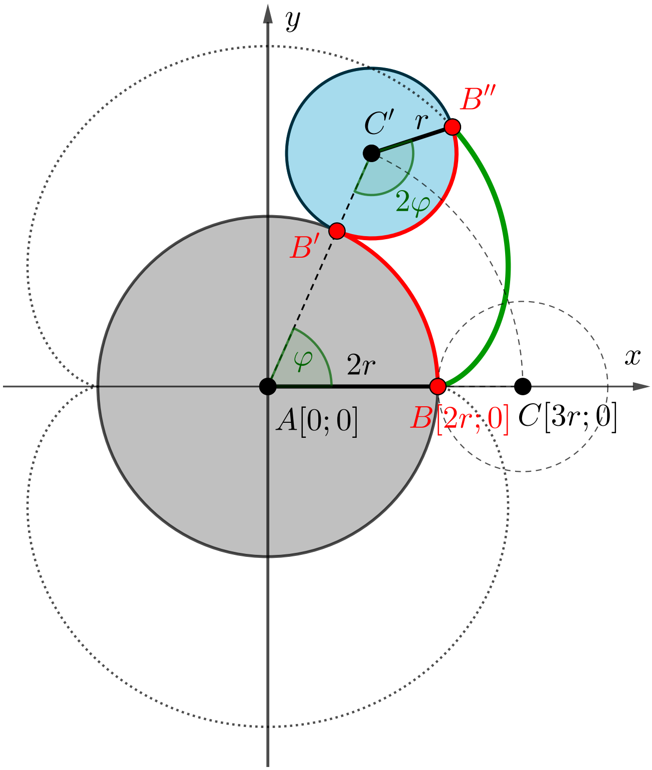
Bude-li φ probíhat a letět jak pták od nuly do 2π, vyplní body B' krástně celou kružnici se středem A a poloměrem $r = |AB|$. Tím dostáváme **prametrické vyjádření kružnice se středem A a výchozím bodem B** (od něhož měříme úhel – parametr φ):

$$\boxed{X = A + \underbrace{(B - A)}_{\vec{r}} \cdot e^{i\varphi};\ \varphi \in \langle 0; 2\pi)} \tag{7}$$

2 Paramatrická rovnice nefroidy

Nyní pomocí vztahů (5) a (6) již snadno odvodíme parametrické vyjádření nefroidy.

Vraťme se k rozkladu pohybu při odvalování kružnice na straně 3. Zavedeme souřadnou soustavu tak, že A umístíme do počátku O a bod B bude ležet na kladné poloose x (viz obr. 5).



Obr. 5: Nefroida jako „stojatá osmička“.

https://www.geogebra.org/m/fthudh3v

1. Bod B otočíme kolem středu A v počátku o úhel φ do bodu B', tedy dle vztahu (6) máme

$$B' = B \cdot e^{i\varphi} \tag{8}$$

Obdobně C otočíme kolem středu A v počátku o úhel φ do bodu C':

$$C' = C \cdot e^{i\varphi} \tag{9}$$

2. Bod B' otočíme kolem středu C' o úhel 2φ do bodu B'', tedy dle vztahu (5) máme

$$B'' = C' + (B' - C') \cdot e^{i2\varphi} \tag{10}$$

Dosadíme (8) a (9) do (10) a dostáváme

$$\begin{aligned} B'' &= Ce^{i\varphi} + (Be^{i\varphi} - Ce^{i\varphi})e^{i2\varphi} \\ B'' &= Ce^{i\varphi} + (B - C)e^{i\varphi}e^{i2\varphi} \\ B'' &= Ce^{i\varphi} + (B - C)e^{i3\varphi} \end{aligned}$$

Body B'', B, C jsou pro nás komplexní čísla, takže $B = 2r + 0i = 2r$ a $C = 3r + 0i = 3r$, tedy $B - C = -r$ takže máme

$$B'' = 3re^{i\varphi} - re^{i3\varphi} \tag{11}$$

Parametrická rovnice nefroidy v komplexním tvaru (pro její polohu v soustavě souřadnic dle obr 5 –„stojatá osmička“) je tedy

$$\boxed{X = 3re^{i\varphi} - re^{i3\varphi};\ \varphi \in (0; 2\pi\rangle} \tag{12}$$

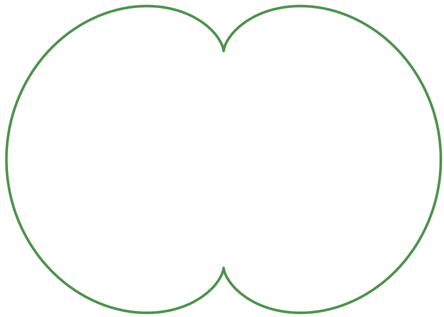
Nyní použijeme Eulerův vztah $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$:

$$\begin{aligned} x + yi &= 3r(\cos\varphi + i\sin\varphi) - r(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) \\ x + yi &= (3r\cos\varphi - r\cos 3\varphi) + (3r\sin\varphi - r\sin 3\varphi)i \end{aligned}$$

Teď se vrátíme od komplexních čísel k souřadnicím bodu X nefroidy:

Nefroida parametricky – stojatá osmička – tvar I.

$$\begin{aligned} x &= 3r\cos\varphi - r\cos 3\varphi \\ y &= 3r\sin\varphi - r\sin 3\varphi \qquad \varphi \in \langle 0; 2\pi) \end{aligned} \tag{13}$$



Obr. 6: Nefroida – ležatá osmička

Pomocí goniometrických vzorců snadno upravíme výrazy pro x a y do následujícího tvaru:

Nefroida parametricky – stojatá osmička – tvar II.

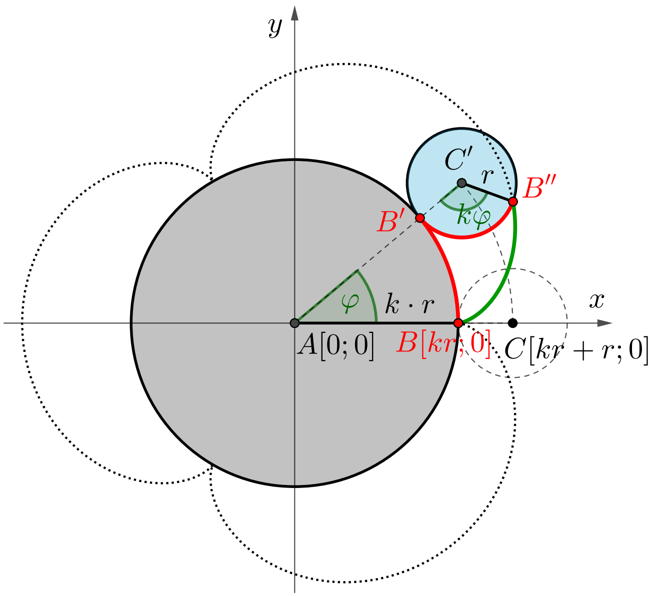
$$x = 6r\cos\varphi - 4r\cos^3\varphi$$
$$y = 4r\sin^3\varphi \qquad \varphi \in \langle 0; 2\pi) \tag{14}$$

Pokud chceme mít nefroidu jako „ležatou osmičku" (obr. 6), stačí znaménka minus změnit na plus (odvození by bylo analogické):

Nefroida parametricky – střed v počátku – ležatá osmička

$$x = 3r\cos\varphi + r\cos 3\varphi = 4r\cos^3\varphi$$
$$y = 3r\sin\varphi + r\sin 3\varphi = 6r\sin\varphi - 4r\sin^3\varphi \qquad \varphi \in \langle 0; 2\pi) \tag{15}$$

3 Zobecnění – epicykloida



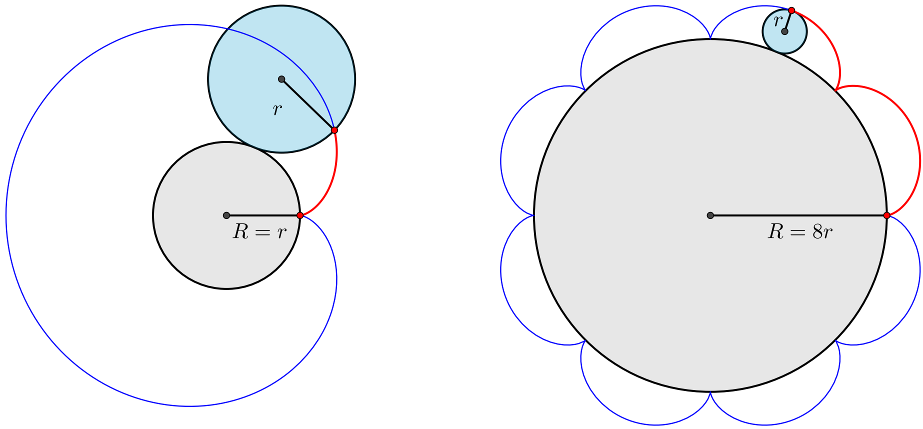
Obr. 7: Je to jako u nefroidy.

https://www.geogebra.org/m/abntqvcd

Ólrajt! Zatím jsme odvalovali **menší** kružnici o poloměru r po **větší** kružnici s poloměrem $R = 2r$. Poměr jejich poloměrů byl tedy $k = \frac{R}{r} = 2$.

Pojďme to zobecnit a uvažujme **libovolný poměr** poloměrů $k \geq 1$ (uvažujeme $R \geq r$). Čummež na obrázek 7 a pusťme si aplet krz odkaz z popisku obrázku.

Pro různé hodnoty k dostáváme křivky, kterým se říká v žargonu žižkovké galérky **epicykloidy**. Nejlepčí halt je pořádně si vše vyzkoušet



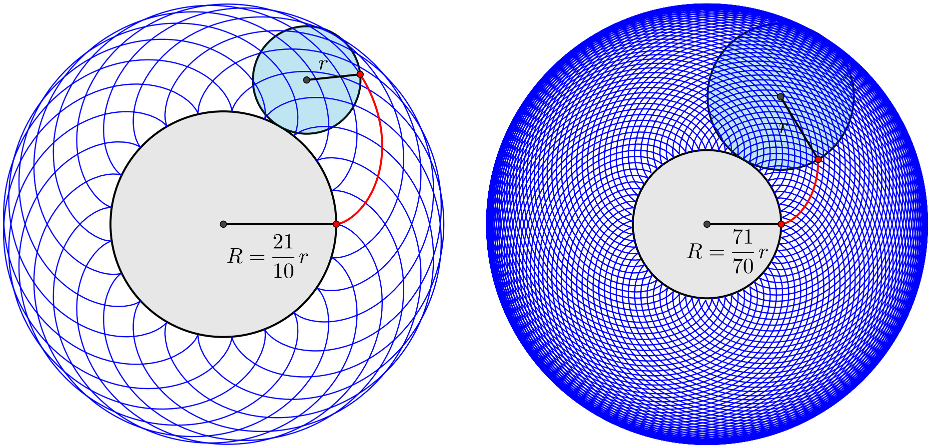
(a) $k = 1$: kardioida

(b) $k = 8$: osminásobný kvítek

Obr. 8: k přirozené

v tom apletu, nó... V apletu nastavujeme hodnotu k pomocí posuvníků p a q, kdy k má hodnotu poměru $k = \frac{p}{q}$.

- Pro k **přirozené** dostáváme takový ty krajkový kytičky (obr. 8), špecielně pro $k = 1$ vznikne **kardioida** a pro $k = 2$ **nefroida**.
- Pro $k = \frac{p}{q}$ **racionální**, ale ne-přirozené (např. $\frac{4}{3}$) vzniknou takový ty složitější kytičky (obr. 9).
- Pro k **iracionální** bychom dostali křivku, která by zcela vyplnila kruhové mezikruží. Ale každý poměr $\frac{p}{q}$, který můžeme reálně nastavit, je vždy jen racionální (Zkusme se aspoň přiblížit - třeba $\frac{p}{q} = \frac{71}{70}$).



(a) $k = \frac{21}{10}$: slunečnice (b) $k = \frac{71}{70}$: hustá slunečnice

Obr. 9: k racionální, ale ne-přirozené

4 Parametrická rovnice epicykloidy

Rovnici obecné epicykloidy odvodíme analogicky jako rovnici jejího speciálního případu – nefroidy.

Obecně (viz obr. 7) musíme uvažovat: poloměr větší kružnice je $R = kr$, dále souřadnice bodů B, C jsou

$$B[kr; 0] \qquad C[kr + r; 0]$$

a rotace bodu B' kolem C' do bodu B'' je o úhel $k\varphi$:

1. Bod B otočíme kolem středu A v počátku o úhel φ do bodu B', tedy dle vztahu (6) máme

$$B' = B \cdot e^{i\varphi} \tag{16}$$

Obdobně C otočíme kolem středu A v počátku o úhel φ do bodu C':

$$C' = C \cdot e^{i\varphi} \tag{17}$$

2. Bod B' otočíme kolem středu C' o úhel $k\varphi$ do bodu B'', tedy dle vztahu (5) máme

$$B'' = C' + (B' - C') \cdot e^{ik\varphi} \tag{18}$$

Dosadíme (16) a (17) do (18) a dostáváme

$$B'' = Ce^{i\varphi} + (Be^{i\varphi} - Ce^{i\varphi})e^{ik\varphi}$$
$$B'' = Ce^{i\varphi} + (B - C)e^{i\varphi}e^{ik\varphi}$$
$$B'' = Ce^{i\varphi} + (B - C)e^{i(k+1)\varphi}$$

Body B'', B, C jsou pro nás komplexní čísla, takže $B = kr + 0i = kr$ a $C = (k+1)r + 0i = (k+1)r$, tedy $B - C = -r$ takže máme

$$B'' = (k+1)re^{i\varphi} - re^{i(k+1)\varphi} \tag{19}$$

Parametrická rovnice epicykloidy v komplexním tvaru (pro její polohu v soustavě souřadnic dle obr 7) je tedy

$$\boxed{X = (k+1)re^{i\varphi} - re^{i(k+1)\varphi}; \ \varphi \in (0; 2\pi\rangle} \tag{20}$$

kde $k = \frac{R}{r}$ je poměr poloměrů kružnice pevné a odvalované.

Přejdeme-li k reálným číslům, máme

Epicykloida paramatricky – střed v počátku

$$x = (k+1)r\cos\varphi - r\cos((k+1)\varphi)$$
$$y = (k+1)r\sin\varphi - r\sin((k+1)\varphi) \qquad \varphi \in \langle 0; 2\pi)$$

Δ

Da Sista Les

∞

.