Durch die zwei Punkte $A(-5,\ 7,\ -4)$ und $B(82,\ -97,\ -30)$ verläuft die Gerade g!

a) Bestimmen Sie eine Geradengleichung der Geraden g in Parameterform:

Mit der Hand / Im Heft	Mit Geogebra
Die Ortsvektoren der beiden Punkte A und B lauten: $\vec{a} := \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} := \begin{pmatrix} 82 \\ -97 \\ -30 \end{pmatrix}$ Der Ortsvektor eines der Punkte, hier A, wird zum Stützvektor der Geraden g. $\vec{s}_g := \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ Der Differenzvektor zweier Punkte der Geraden wird zum Richtungsvektor. $\vec{r_g} := \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 87 \\ -104 \\ -26 \end{pmatrix}$ Damit lautet die Gleichung der Geraden g in Parameterform: $g: \vec{x}_g = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 87 \\ -104 \\ -26 \end{pmatrix}$	1 $A := (-5,\ 7,\ -4)$ $\rightarrow$ $\mathbf{A := (-5,\ 7,\ -4)}$ 2 $B := (82,\ -97,\ -30)$ $\rightarrow$ $\mathbf{B := (82,\ -97,\ -30)}$ 3 a := Vektor(A) $\rightarrow$ $\mathbf{a := \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}}$ 4 b := Vektor(B) $\rightarrow$ $\mathbf{b := \begin{pmatrix} 82 \\ -97 \\ -30 \end{pmatrix}}$ 5 $s_g := a$ $\rightarrow$ $\mathbf{s_g := \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}}$ 6 $r_g := b - a$ $\rightarrow$ $\mathbf{r_g := \begin{pmatrix} 87 \\ -104 \\ -26 \end{pmatrix}}$ 7 $x_g := s_g + \lambda\, r_g$ $\rightarrow$ $\mathbf{x_g := \begin{pmatrix} 87\lambda - 5 \\ -104\lambda + 7 \\ -26\lambda - 4 \end{pmatrix}}$

b) Zeigen Sie, dass der Punkt P(−1670, −653, −736) nicht auf der Geraden g liegt!

Mit der Hand / Im Heft	Mit Geogebra

Mit der Hand / Im Heft

Der Ortsvektor des Punktes P ist:

$$p \coloneqq \begin{pmatrix} -1670 \\ -653 \\ -736 \end{pmatrix}$$

Wenn der P auf der Geraden g liegt, dann muss der Ortsvektor des Punktes P die Geradengleichung der Geraden g erfüllen:

$$\begin{pmatrix} -1670 \\ -653 \\ -736 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 87 \\ -104 \\ -26 \end{pmatrix}$$

Das führ zu drei Gleichungen für λ. Nur wenn alle drei Gleichungen die gleiche Lösung haben, liegt der Punkt auf der Geraden:

$$-87\,\lambda - 1665 = 0 | +1665$$
$$-87\,\lambda = 1665 | \div (-87)$$
$$\lambda = \frac{-555}{29}$$

$$104\,\lambda - 660 = 0 | +660$$
$$104\,\lambda = 660 | \div 104$$
$$\lambda = \frac{165}{26}$$

Hier kann man bereits darauf schließen, dass der Punkt nicht auf der Geraden liegt.
Ich rechne trotzdem auch noch die dritte Gleichung, was aber unnötig ist:

$$26\,\lambda - 732 = 0 | +732$$
$$26\lambda = 732 | \div 26$$
$$\lambda = \frac{366}{13}$$

Mit Geogebra

8 P := (−1670, −653, −736)
→ P := (−1670, −653, −736)

9 p := Vektor(P)
→ $p \coloneqq \begin{pmatrix} -1670 \\ -653 \\ -736 \end{pmatrix}$

10 $p = x_g$
→ $\begin{pmatrix} -1670 \\ -653 \\ -736 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87\,\lambda - 5 \\ -104\,\lambda + 7 \\ -26\,\lambda - 4 \end{pmatrix}$

11 Löse($10, λ)
→ {}

12 Alternativ

13 $p - x_g$
→ $\begin{pmatrix} -87\,\lambda - 1665 \\ 104\,\lambda - 660 \\ 26\,\lambda - 732 \end{pmatrix}$

14 Gleichung1 : Element($13, 1) = 0
→ **Gleichung1 : −87 λ − 1665 =**

15 Gleichung2 : Element($13, 2) = 0
→ **Gleichung2 : 104 λ − 660 = 0**

16 Gleichung3 : Element($13, 3) = 0
→ **Gleichung3 : 26 λ − 732 = 0**

17 Löse(Gleichung1, λ)
→ $\left\{\lambda = \frac{-555}{29}\right\}$

18 Löse(Gleichung2, λ)
→ $\left\{\lambda = \frac{165}{26}\right\}$

19 Löse(Gleichung3, λ)
→ $\left\{\lambda = \frac{366}{13}\right\}$

20 Noch ausführlicher
→ **Noch ausführlicher**

21 Gleichung1 + 1665
→ −87 λ = 1665

22 $\frac{\$21}{-87}$
→ $\lambda = \frac{-555}{29}$

23 Gleichung2 + 660
→ 104 λ = 660

24 $\frac{\$23}{104}$
→ $\lambda = \frac{165}{26}$

25 Gleichung3 + 732
→ 26 λ = 732

26 $\frac{\$25}{26}$
→ $\lambda = \frac{366}{13}$

c) Geben Sie einen beliebigen Punkt auf der Geraden g an!

Mit der Hand / Im Heft	Mit Geogebra
Einen beliebigen Punkt einer Gerade findet man, indem man einen beliebigen Wert für den Parameter einsetzt. $\vec{p}_{beliebig} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 87 \\ -104 \\ -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ -513 \\ -134 \end{pmatrix}$ Der Punkt $P_{beliebig}(430\|-513\|-134)$ ist ein Punkt der Geraden g.	p_{beliebig}:=Ersetze(x_g, λ=5) $\rightarrow\ p_{beliebig} := \begin{pmatrix} 430 \\ -513 \\ -134 \end{pmatrix}$

d) Berechnen Sie den Abstand "Ihres" Punktes vom Punkt P(−1670, −653, −736)

Mit der Hand / Im Heft	Mit Geogebra
$\left\| \begin{pmatrix} 430 \\ -513 \\ -134 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1670 \\ -653 \\ -736 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2100 \\ -140 \\ -602 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2100)^2 + (-140)^2 + (-602)^2} \approx 2189{,}06$	28 abs(p-p_{beliebig}) $\rightarrow\ 14\sqrt{24449}$ 29 $28 $\approx\ 2189.06$

e) Bestimmen Sie einen Punkt P_g auf der Geraden g so dass der Verbindungsvektor von P_g zu P(−1670, −653, −736) senkrecht zum Richtungsvektor $\vec{r_g} = \begin{pmatrix} -87 \\ 104 \\ 26 \end{pmatrix}$ der Geraden g ist!

Neu

drehen

¬drehen

Da der Punkt P_g auf der Geraden g liegt, muss der Ortsvektor $\vec{p}_g$ des Punkts P_g die Geradengleichung der Geraden g erfüllen:

$$p_g \coloneqq \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 87 \\ -104 \\ -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87\,\lambda - 5 \\ -104\,\lambda + 7 \\ -26\,\lambda - 4 \end{pmatrix}$$

Den Verbindungsvektor zwischen dem Punkt P und dem Punkt P_g erhält man durch Subtraktion der beiden Ortsvektoren:

$$\overrightarrow{pp_g} \coloneqq \vec{p}_g - \vec{p} =$$

$$\begin{pmatrix} -1670 \\ -653 \\ -736 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 87\,\lambda - 5 \\ -104\,\lambda + 7 \\ -26\,\lambda - 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 87\,\lambda + 1665 \\ -104\,\lambda + 660 \\ -26\,\lambda + 732 \end{pmatrix}$$

Der Verbindungsvektor soll senkrecht zur Geraden g sein. Dann ist der Verbindungsvektor auch senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden g

$$\overrightarrow{pp'}_g \cdot r_g = 0$$

$$\begin{pmatrix} 87\,\lambda + 1665 \\ -104\,\lambda + 660 \\ -26\,\lambda + 732 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 87 \\ -104 \\ -26 \end{pmatrix} = 0$$

$$(87\,\lambda + 1665) \cdot 87 + (-104\,\lambda + 660) \cdot (-104) + (-26\,\lambda + 732) \cdot (-26) = 0$$

Ausmultipliziert und zusammengefasst:

$$19061\,\lambda + 57183 = 0$$

$$\lambda = -3$$

Einsetzen von λ in $\vec{p}_g$:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 87 \\ -104 \\ -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -266 \\ 319 \\ 74 \end{pmatrix}$$

$$P_g = (-266|319|74)$$

31	p_g:=x_g $\approx\ \mathbf{p_g} := \begin{pmatrix} 87\,\lambda - 5 \\ -104\,\lambda + 7 \\ -26\,\lambda - 4 \end{pmatrix}$
32	pp_g:=p_g-p $\approx\ \mathbf{pp_g} := \begin{pmatrix} 87\,\lambda + 1665 \\ -104\,\lambda + 660 \\ -26\,\lambda + 732 \end{pmatrix}$
33	pp_g*r_g=0 $\approx\ \mathbf{19061\,\lambda + 57183 = 0}$
34	Löse($33, λ) $\approx\ \{\lambda = -3\}$
35	Ersetze(p_g, $34) $\approx\ \begin{pmatrix} -266 \\ 319 \\ 74 \end{pmatrix}$

f) Der Abstand eines Punktes P zur einer Geraden ist der kürzeste Abstand zwischen einem Punkt der Geraden und dem Punkt P.
Die kürzesten Abstand haben die Punkte, deren Verbindungsvektor senkrecht zur Geraden und damit zum Richtungsvektor ist.
Berechnen Sie nun den Abstand zwischen $P(-1670,\ -653,\ -736)$ und $P_g(-266,\ 319,\ 74)$ und damit den Abstand zwischen P und der Geraden g.

Die Länge des Verbindungsvektors zwischen den Punkten P und P_g entspricht dem Abstand der Punkte P und P_g und damit dem Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g: $$\left\vert\vec{p}-\vec{p}_g\right\vert = \left\vert\begin{pmatrix}-1670\\-653\\-736\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-266\\319\\74\end{pmatrix}\right\vert = \left\vert\begin{pmatrix}1404\\972\\810\end{pmatrix}\right\vert = \sqrt{1404^2+972^2+810^2} = 1890$$	36 abs(pp_g) $\approx \sqrt{19061\,\lambda^2 + 114366\,\lambda + 3743649}$ 37 Ersetze($36, $34) $\approx$ **1890**