Papírové meditace

Stříbronosná posloupnost

Žán Pól Kastról

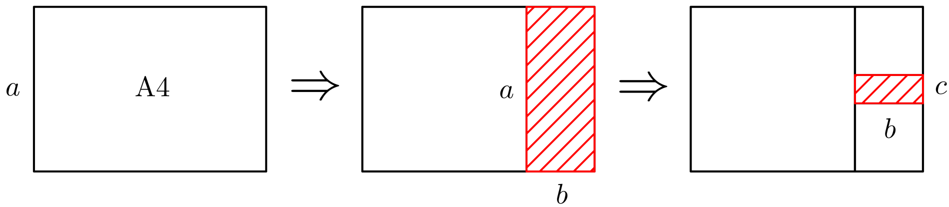
9. listopadu 2021

1 Stříbrný vítr, Stříbrný obdélník a Stříbrný Řez

Vezměmež papír formátu $A4$ a oddělmež od něj čtverec (viz obr. 1). Vznikne tajuplný obdélník, který má mnoho zajímavých vlastností, jak si také záhy vokážeme.

Tento obdélník objevil náš milovaný básník Fráňa Šrámek v Písku u splavu na břehu řeky Otavy, když ze svých nezdařených básní skládal lodičky a vlašťovky a pouštěl je po proudu nebo po větru a nazval jej poeticky Stříbrný Vítr. (Je známo, že Otava je stříbronosná, stejně tak jako písecký vítr.)

V pozdějších dobách se tomuto obdélníku začalo říkat též Stříbrný Obdélník a poměru jeho stran Stříbrný Řez.



Obr. 1: Stříbrný vítr

Příklad 1

a) Urči poměr $\frac{a}{b}$ stran Stříbrného Obdélníku.
b) Odděl od SO dva čtverce (viz obr. 1 c)). Jaký poměr stran $\frac{b}{c}$ má zbylý obdélník?

---

a) Papír $A4$ má poměr stran $1 : \sqrt{2}$. Kratší stranu označme a, delší strana má tedy délku $a\sqrt{2}$. Oddělíme-li čtverec, bude mít vzniklý Stříbrný obdélník kratší stranu $b = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$, pročež poměr stran SO bude

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{a}{a(\sqrt{2}-1)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1\end{aligned} \tag{1}$$

Označíme-li $\frac{a}{b}$ jako σ, dostáváme pro poměr Stříbrného Řezu hodnotu

$$\boxed{\sigma = 1+\sqrt{2}} \tag{2}$$

b) Nyní oddělíme od tohoto SO dva čtverce a máme obdélník s delší stranou b a s kratší stranou $c = a - 2b$. Poměr jeho stran je tedy

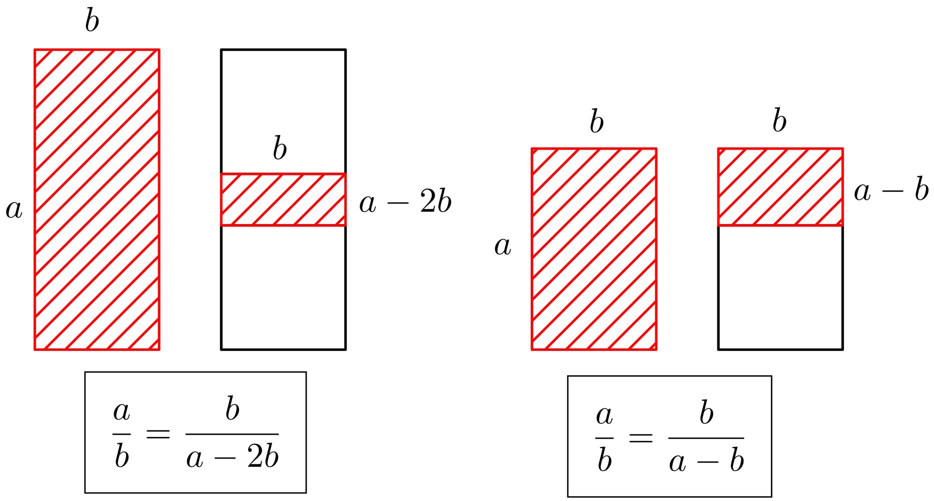
$$\begin{aligned}\frac{b}{c} &= \frac{b}{a-2b}\\ &= \frac{1}{\frac{a}{b}-2}\\ &= \frac{1}{1+\sqrt{2}-2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \overset{(1)}{=} \sigma\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{b}{c} = \sigma}$$

Vidíme tedy, že *oddělením dvou čtverců* od SO dostáváme opět SO! To nás přivádí k myšlence definovat Stříbrný Řez takto:

Definice 1: Stříbrný řez

Stříbrný Řez je poměr větší strany a ku menší straně b obdélníku, jenž má tu vlastnost, že po oddělení **dvou** čtverců o straně b od tohoto obdélníku zbyde obdélník, který je původnímu obdélníku podobný jako vejce vejci. (viz obr. 2 vlevo)



Obr. 2: Stříbrný obdélník a Zlatý obdélník

Podobnost se Zlatým obdélníkem a zlatým řezem:

Zlatý Obdélník o větší straně a a menší straně b je takový obdélník, že po oddělení **jednoho** čtverce o straně b od tohoto obdélníku zbyde obdélník, který je původnímu obdélníku podobný jako vejce vejci. (viz obr. 2 vpravo). Poměr větší strany ku menší straně zlatého obdélníku se nyzývá Zlatý Řez (ZŘ).

Je nasnadě, že ZŘ a SŘ budou mít mnoho podobných vlastností, což uvidíme dále.

2 Stříbrná KVARO

Dle naší definice tedy pro SŘ platí:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-2b}$$

Označíme - li $\frac{a}{b}$ jako x, dostáváme po úpravě rovnice

$$x = \frac{1}{x-2}$$
$$x^2 - 2x = 1$$

$$\boxed{x^2 - 2x - 1 = 0} \tag{3}$$

Dostali jsme staroslavnou Stříbrnou Kvaro, kterou lze též psát ve tvaru

$$\boxed{x^2 = 2x + 1} \tag{4}$$

Je to obdoba Zlaté Kvaro

$$\boxed{x^2 = x + 1} \tag{5}$$

kterou bychom obrželi z podobného vztahu $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ (viz obr. 2 vpravo).

Stříbrná Kvaro má dva kořeny, a sicejc

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Kladný kořen už známe, je to právě Stříbrný Řez, jenž jsme označili σ. Záporný kořen označme τ.

$$\sigma = 1 + \sqrt{2} \doteq 2,414 \tag{6}$$

$$\tau = 1 - \sqrt{2} \doteq -0.414 \tag{7}$$

Z toho plynou vztahy

$$\sigma + \tau = 2 \tag{8}$$

$$\sigma - \tau = \sqrt{8} \tag{9}$$

$$\sigma \cdot \tau = -1 \tag{10}$$

Pro σ i τ platí důležitý vztah (4), tedy

$$\boxed{\sigma^2 = 2\sigma + 1} \tag{11}$$

$$\boxed{\tau^2 = 2\tau + 1} \tag{12}$$

A vydělením:

$$\sigma = 2 + \frac{1}{\sigma} \tag{13}$$

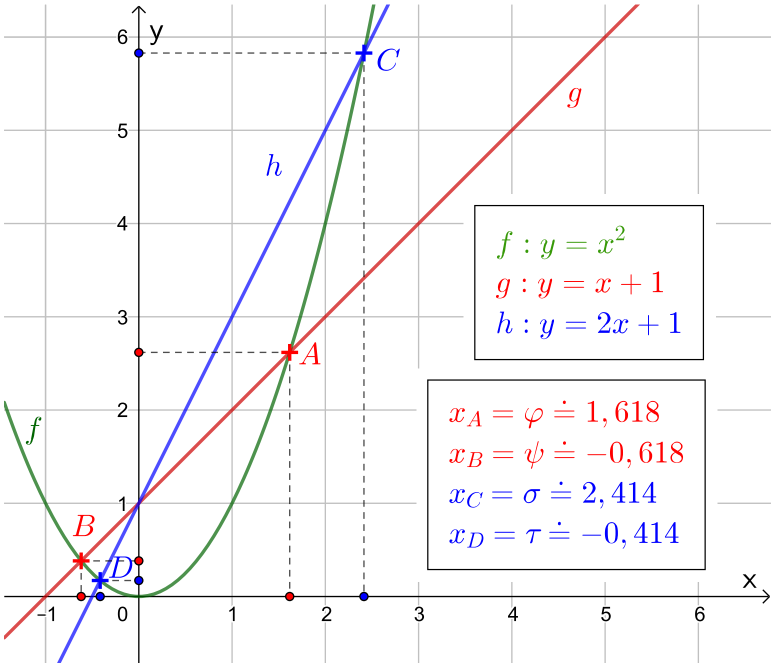
$$\tau = 2 + \frac{1}{\tau} \tag{14}$$

Obdobné vztahy platí pro Zlaťák:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 1,618$$

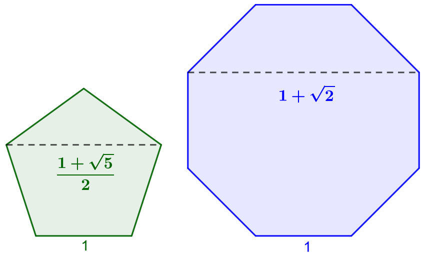
$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \doteq -0,618$$
$$\varphi + \psi = 1$$
$$\varphi - \psi = \sqrt{5}$$
$$\varphi \cdot \psi = -1$$
$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$
$$\psi = 1 + \frac{1}{\psi}$$
$$\varphi^2 = \varphi + 1$$
$$\psi^2 = \psi + 1$$

3 Interpretace vztahů (4) a (5) pomocí grafů funkcí

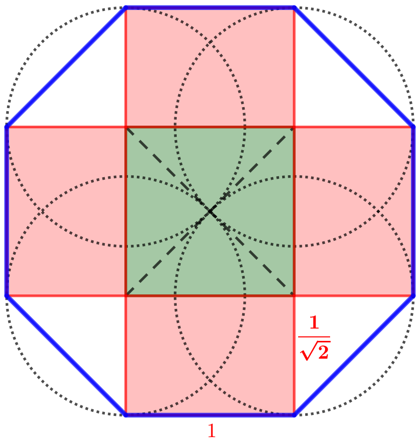


Obr. 3

4 Osmiúhelník - pětiúhelník



Obr. 4



Obr. 5

5 Řetězáky

Zlatý řez lze vyjádřit nekonečným řetězovým zlomkem

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

Odtud dostáváme posloupnost aproximací φ pomocí zlomků:

$$\begin{aligned}
\varphi &\approx 1 = \frac{1}{1} = 1,000 \qquad (15)\\
&\approx 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2,000\\
&\approx 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2} \doteq 1,500\\
&\approx 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3} \doteq 1,667\\
&\approx 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{8}{5} \doteq 1,600
\end{aligned}$$

$$\approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}=\frac{13}{8}\doteq 1,625$$

$$\approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}=\frac{21}{13}\doteq 1,615$$

$$\approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}=\frac{34}{21}\doteq 1,619$$

$$\approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}=\frac{55}{34}\doteq 1,618$$

$$\vdots$$

Příklad 2

Najdi nekonečný řetězový zlomek pro Stříbrný Řez a několik prvních jeho aproximací pomocí zlomků.

No tak hele, asi takhle – vztah (11) vydělíme σ a dostaneme

$$\sigma = 2 + \frac{1}{\sigma}$$

A odtud vidíme, že do jmenovatele zlomku na pravé straně můžeme za σ dosadit $2 + \dfrac{1}{\sigma}$

$$\sigma = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sigma}}$$

Opakovaným dosazováním dostaneme

$$\boxed{\sigma = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}} \tag{16}$$

Odtud dostáváme posloupnost aproximací σ pomocí zlomků:

$$\begin{aligned} \sigma &\approx 2 = \frac{2}{1} = 2,000 \\ &\approx 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,500 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\approx 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{12}{5} \doteq 2,400$$

$$\approx 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{29}{12} \doteq 2,417$$

$$\approx 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{70}{29} \doteq 2,414$$

$$\vdots$$

Páč $\sigma = 1 + \sqrt{2}$, dostáváme také řetězák pro $\sqrt{2}$:

$$\boxed{\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}} \tag{18}$$

Odtud dostáváme posloupnost aproximací $\sqrt{2}$ pomocí zlomků:

$$\sqrt{2} \approx 1 = \frac{1}{1} = 1,000 \tag{19}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,500$$

$$\approx 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5}\doteq 1{,}400$$

$$\approx 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12}\doteq 1{,}417$$

$$\approx 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=\frac{41}{29}\doteq 1{,}414$$

$$\vdots$$

6 Stříbronosná posloupnost - rekurentně

U zlatého řezu jsme ve vztazích (15) dostali tyto aproximace:

$$\frac{1}{1};\frac{2}{1};\frac{3}{2};\frac{5}{3};\frac{8}{5};\frac{13}{8};\frac{21}{13};\frac{34}{21};\frac{55}{34};\dots \tag{20}$$

Víme, že tyto zlomky jsou tvořeny podílem dvou po sobě jdoucích členů *Fibonacciho posloupnosti*:

$$1;1;2;3;5;8;13;21;34;55;\dots,$$

která má rekurentní vyjádření

$$\boxed{F_{n+2}=F_{n+1}+F_n;\quad F_1=1,\ F_2=1} \tag{21}$$

Podívejmež se na aproximace stříbrňáku (17)

$$\frac{2}{1};\frac{5}{2};\frac{12}{5};\frac{29}{12};\frac{70}{29}\dots$$

Vidíme, že posloupnost těchto aproximací má velmi podobnou strukturu jako posloupnost aproximací zlatého řezu (20). Je to také posloupnost zlomků tvořených podílem dvou po sobě jdoucích členů *jisté posloupnosti*:

$$1; 2; 5; 12; 29; 70; \ldots$$

Tuto posloupnost nazval Fráňa STŘÍBRONOSNÁ POSLOUPNOST, v matematických kuloárech se jí také říká FIBONACCIHO STŘÍBRNÁ POSLOUPNOST či PELLOVA POSLOUPNOST .

Úloha:

Označme členy *Pellovy posloupnosti* $P_1; P_2; P_3 \ldots$ Najdi rekurentní vyjádření *Pellovy posloupnosti*!

Řešba:

Well, boys, jdeme na to! Takže ze vztahů (17) vidíme, že samotná posloupnost aproximací v podobě zlomků má rekurentní vyjádření

$$Z_{n+1} = 2 + \frac{1}{Z_n} \tag{22}$$

Tedy následující zlomek aproximující stříbrňák dostaneme tak, že k číslu 2 přičteme převratnou hodnotu zlomku předchozího, right? Dále vidíme, že zlomky jsou tvořeny podílem

$$Z_{n+1} = \frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} \tag{23}$$

Protož dostáváme

$$\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = 2 + \frac{1}{\frac{P_{n+1}}{P_n}}$$

$$\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = 2 + \frac{P_n}{P_{n+1}}$$
$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

Pellova Posloupnost má tedy rekurentní vyjádření

$$\boxed{P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n; \quad P_1 = 1,\ P_2 = 2} \tag{24}$$

$$\boxed{1; 2; 5; 12; 29; 70; 169; 408; 985; 2378; 5741; 13860 \ldots} \tag{25}$$

Poznámka: Pro Z_{n+1} můžeme také vzhledem k (22) a (23) psát:

$$\boxed{Z_{n+1} = 2 + \frac{P_n}{P_{n+1}}} \tag{26}$$

Všimněmež si, že i posloupnost (19) aproximací čísla $\sqrt{2}$ souvisí s Pellovými Čísly:

$$\frac{1}{1}; \frac{3}{2}; \frac{7}{5}; \frac{17}{12}; \frac{41}{29}; \ldots$$

Ve jmenovatelích jsou Pellova Čísla a v čitatelích je posloupnost $1; 3; 7; 17; 41$, která má zřejmě rovněž rekurentní vztah stejný jako Pellova Posloupnost , pouze první dva členy jsou 1 a 3. Také platí, že čitatel daného zlomku je součtem jmenovatele tohoto zlomku s jmenovatelem zlomku předchozího. Proto tuto posloupnost aproximací druhé odmocniny ze dvou můžeme vyjádřit jen pomocí Pellovy posloupnosti takto:

$$O_{n+1} = \frac{P_n + P_{n+1}}{P_{n+1}}$$

Tedy po úpravě

$$\boxed{O_{n+1} = 1 + \frac{P_n}{P_{n+1}}}$$

což je v souladu s (26), páč zlomky aproximací $\sqrt{2}$ jsou o 1 menší než zlomky aproximací stříbrňáku ($\sigma = 1 + \sqrt{2}$)

7 Vzorec pro n-tý člen *Pellovy posloupnosti*

Rekurentní vztah (24) pro Pellovu Stříbronosnou posloupnost (25) tedy známe. Nyní vyvodíme vztah pro n-tý člen Pellovy posloupnosti. (Obdoba Binetova vzorce pro Fibonacciho posloupnost.) Pro odvození použijeme posloupnosti

$$1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \dots \tag{27}$$

$$1, \tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4, \dots \tag{28}$$

kde σ je STŘÍBRNÝ ŘEZ a τ je druhý kořen té naší oblíbené stříbrné KVARO (3). Páč platí vztah (11), dostáváme pro první posloupnost:

$$
\begin{aligned}
&1\\
&\sigma\\
&\sigma^2 = 2\sigma + 1 = P_2\sigma + P_1\\
&\sigma^3 = \sigma^2 \cdot \sigma = (2\sigma + 1) \cdot \sigma = 2\sigma^2 + \sigma = 2(2\sigma + 1) + \sigma = 5\sigma + 2 = P_3\sigma + P_2\\
&\sigma^4 = (5\sigma + 2) \cdot \sigma = 5\sigma^2 + 2\sigma = 5(2\sigma + 1) + 2\sigma = 12\sigma + 5 = P_4\sigma + P_3\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Vidíme, že se nám zde objevuje Pellova stříbronosná posloupnost P_n. Naše hypotéza:

$$\forall n \in N, n \geq 2 : \sigma^n = P_n\sigma + P_{n-1} \tag{29}$$

Důkaz hypotézy matematickou indukcí:
1) $\underline{n = 2}$: Lestra $= \sigma^2 = 2\sigma + 1$; Prastra $= P_2\sigma + P_1 = 2\sigma + 1 \to$ OK
2) Indukční kročej:

$$\forall k \in N, k \geq 2 : \sigma^k = P_k\sigma + P_{k-1} \Rightarrow \sigma^{k+1} = P_{k+1}\sigma + P_k$$

důkaz IK:
$$\begin{aligned} Lestra = \sigma^{k+1} &= \sigma^k \cdot \sigma \\ &= (P_k\sigma + P_{k-1})\sigma \\ &= P_k\sigma^2 + P_{k-1}\sigma \\ &= P_k(2\sigma + 1) + P_{k-1}\sigma \\ &= 2P_k\sigma + P_k + P_{k-1}\sigma \\ &= \sigma(2P_k + P_{k-1}) + P_k \\ &= P_{k+1}\sigma + P_k = Prastra \quad \square \end{aligned}$$

Úplně stejně bychom dokázali (s využitím vztahu (12) pro τ), že obdobné tvrzení platí také pro druhou posloupnost (28):

$$\forall n \in N, n \geq 2 : \tau^n = P_n\tau + P_{n-1} \tag{30}$$

Dokázali jsme tedy (viz tvrzení (29) a (30)), že pro každé přirozené číslo větší než jedna platí vztahy

$$\sigma^n = P_n\sigma + P_{n-1} \tag{31}$$
$$\tau^n = P_n\tau + P_{n-1} \tag{32}$$

Tyto vztahy odečteme:

$$\sigma^n - \tau^n = P_n(\sigma - \tau) \tag{33}$$

a dostáváme pro $n \geq 2$ pro Pellova čísla vztah

$$P_n = \frac{\sigma^n - \tau^n}{\sigma - \tau}$$

Snadno však zjistíme, že tento vztah platí i pro $n = 1$, páč $\frac{\sigma^1 - \tau^1}{\sigma - \tau} = 1$ a P_1 je vskutku 1. Takže jsme vyvodili vztah obdobný Binetáku pro Fibonacciho čísla:

$$\boxed{\forall n \in N : P_n = \frac{\sigma^n - \tau^n}{\sigma - \tau}} \tag{34}$$

Vzhledem k tomu, že platí:

$$\sigma - \tau = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} \tag{35}$$

$$\sigma + \tau = 2 \rightarrow \tau = 2 - \sigma \tag{36}$$

$$\sigma\tau = -1 \rightarrow \tau = -\frac{1}{\sigma}, \tag{37}$$

můžeme psát vztah pro Pellova čísla v různých dalších tvarech:

$$\boxed{P_n = \frac{\sigma^n}{\sqrt{8}} - \frac{\tau^n}{\sqrt{8}}} \tag{38}$$

$$\boxed{P_n = \frac{\sigma^n}{\sqrt{8}} - \frac{\left(-\frac{1}{\sigma}\right)^n}{\sqrt{8}}} \tag{39}$$

$$\boxed{P_n = \frac{\sigma^n}{\sqrt{8}} - \frac{(2-\sigma)^n}{\sqrt{8}}} \tag{40}$$

$$\boxed{P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}} \tag{41}$$

$$\boxed{P_n = \frac{\left(\frac{2+\sqrt{8}}{2}\right)^n - \left(\frac{2-\sqrt{8}}{2}\right)^n}{\sqrt{8}}} \tag{42}$$