Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 19 - integrales cíclicas tras aplicar partes

1. Resuelve $\int sen(x) e^x \, dx$

Aplicamos método por partes → $\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$

$$u(x)=e^x \quad \rightarrow \quad u'(x)=e^x$$
$$v'(x)=sen(x) \quad \rightarrow \quad v(x)=-\cos(x)$$
$$I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx=-\cos(x)\cdot e^x+\int \cos(x)\cdot e^x \, dx$$

En la nueva integral que obtenemos, volvemos a aplicar método por partes.

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$$
$$u(x)=e^x \quad \rightarrow \quad u'(x)=e^x$$
$$v'(x)=\cos(x) \quad \rightarrow \quad v(x)=sen(x)$$
$$I=-\cos(x)\cdot e^x+[u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx]=-\cos(x)\cdot e^x+sen(x)\cdot e^x-\int sen(x)\cdot e^x \, dx$$

Nos damos cuenta que la nueva integral coincide con la integral de partida. Es decir:

$$\int sen(x)\cdot e^x \, dx=-\cos(x)\cdot e^x+sen(x)\cdot e^x-\int sen(x)\cdot e^x \, dx$$

Pasamos sumando, a la izquierda, la integral del miembro derecho.

$$\int sen(x)\cdot e^x dx+\int sen(x)\cdot e^x \, dx=-\cos(x)\cdot e^x+sen(x)\cdot e^x$$
$$2\cdot\int sen(x)\cdot e^x \, dx=-\cos(x)\cdot e^x+sen(x)\cdot e^x$$

Y despejamos nuestra integral de partida del ejercicio.

$$\int sen(x)\cdot e^x \, dx=\frac{1}{2}[-\cos(x)\cdot e^x+sen(x)\cdot e^x]+C=\frac{e^x}{2}[sen(x)-\cos(x)]+C$$

2. Resuelve $\int e^{3x} \cdot sen(x)\,dx$

Resolvemos esta integral por el método de integración por partes.

$u = e^{3x} \to \to \to du = 3e^{3x}\,dx$

$dv = \sin x\,dx \to \to \to v = -\cos x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Sustituimos:

$I = \int e^{3x}\,sen\,x\,dx = -e^{3x}\cos x + \int \cos x\,3e^{3x}\,dx$

La nueva integral que aparece también la resolvemos por partes:

$u = 3e^{3x} \to \to \to du = 9e^{3x}\,dx$

$dv = \cos x\,dx \to \to \to v = sen\,x$

$\int \cos x\,3e^{3x}\,dx = 3e^{3x}\,sen\,x - \int sen\,x\,9e^{3x}\,dx = 3e^{3x}\,sen\,x - 9\int sen\,x\,e^{3x}\,dx$

Sustituimos esta expresión en la integral de partida $I = \int e^{3x} \cdot sen(x)\,dx$.

$\int e^{3x}\,sen\,x\,dx = -e^{3x}\cos x + 3e^{3x}\,sen\,x - 9\int sen\,x\,e^{3x}\,dx$

Y nos damos cuenta que en el término de la derecha recuperamos la integral de partida de la izquierda. Por lo que agrupamos en el miembro de la izquierda:

$10\int e^{3x}\,sen\,x\,dx = e^{3x}(-\cos x + 3\,sen\,x) + C$

Despejamos:

$\int e^{3x}\,sen\,x\,dx = \frac{1}{10}e^{3x}(-\cos x + 3\,sen\,x) + C$

3. Resuelve $\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$

Aplicamos partes.

$$u=e^x \rightarrow diferenciamos \rightarrow du=e^x\,dx$$

$$dv=\cos(x)\,dx \rightarrow integramos \rightarrow v=sen(x)$$

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

$$I=\int e^x \cdot \cos(x)\,dx=e^x \cdot sen(x)-\int sen(x)\cdot e^x\,dx$$

Nos encontramos con otra integral cuya resolución también requiere partes.

$$u=e^x \rightarrow derivamos \rightarrow du=e^x\,dx$$

$$dv=sen(x)\,dx \rightarrow integramos \rightarrow v=-\cos(x)$$

$$\int sen(x)\cdot e^x=-\cos(x)\cdot e^x+\int \cos(x)\cdot e^x\,dx$$

Sustituimos en el resultado de la integral $I=\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$ de partida.

$$\int e^x \cdot \cos(x)=e^x \cdot sen(x)+\cos(x)\cdot e^x-\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$$

Nos damos cuenta la integral de partida $I=\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$ aparece en ambos miembros de la igualdad. Agrupamos a la izquierda.

$$2\cdot\int e^x \cdot \cos(x)=e^x \cdot sen(x)+\cos(x)\cdot e^x$$

Y podemos despejar el valor final de $I=\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$.

$$\int e^x \cdot \cos(x)=\frac{e^x \cdot sen(x)+\cos(x)\cdot e^x}{2}=\frac{e^x[sen(x)+\cos(x)]}{2}$$