4. Die Quadratzahlenkurve: Auf dem positiven Zahlenstrahl seien die Zahlen durch Punkte dargestellt. Errichtet man in diesen Punkten die Normalen auf den Zahlenstrahl und trägt darauf — vom Zahlenstrahl aus — n^2 als Strecke auf (Fig. 26), so erkennt man, wenn die Strecken genügend dicht sind, daß ihre Endpunkte auf einer krummen Linie (Kurve), der **Quadratzahlenkurve,** liegen. Ist die Quadratzahlenkurve mit ausreichender Genauigkeit gezeichnet, so kann man sie dazu verwenden, um zu Zahlen n den zugehörigen Wert n^2 abzulesen.

5. Wie man aus Fig. 26 erkennt, kann man kurze Teilstücke der Kurve recht gut durch Strecken näherungsweise ersetzen. Diese Tatsache benützt man, wenn man einen **Näherungswert** für das Quadrat einer vier- oder mehrziffrigen Zahl berechnen soll.

Beispiel: Es ist mit Verwendung der Quadratzahlentafel ein Näherungswert für $126{,}74^2$ zu berechnen!

Aus der Tafel entnimmt man:

$$\begin{array}{rcr} 127^2 & = & 16\,129 \\ 126^2 & = & 15\,876 \\ \hline 127^2 - 126^2 & = & 253 \end{array}$$

Wächst die Zahl um 1, so wächst das Quadrat um 253; wächst die Zahl um 0,1 bzw. 0,01, so wird die Quadratzahl angenähert um 1 Zehntel bzw. um 1 Hundertstel dieser Differenz, das ist 25,3 bzw. 2,53, wachsen.

Man rechnet daher:

$$\begin{array}{r|r|l} 126^2 & 15\,876 & \text{Nebenrechnungen:} \\ & 177{,}1 & 25{,}3 \cdot 7 = 177{,}1 \\ & 10{,}1 & 2{,}53 \cdot 4 = 10{,}12 \approx 10{,}1 \\ \hline \end{array}$$

$126{,}74^2 \approx 16\,063{,}2$ (genauer Wert: $16\,063{,}0276$)

29. Quadratwurzel, Quadratwurzelziehen

a) Begriff der Quadratwurzel

Es ist $4^2 = 16$. Man nennt 4 die **Quadratwurzel** aus 16, schreibt $\sqrt{16} = 4$ und spricht: **Quadratwurzel aus 16 ist 4.** Mit Verwendung von allgemeinen Zahlen schreibt man:

$$\sqrt{n^2} = n$$

b) Die Benützung der Quadratzahlentafeln zur Ermittlung der Quadratwurzeln

1. Man kann die Quadratzahlentafeln dazu verwenden, um von den dort in der Spalte n^2 angegebenen Zahlen die Quadratwurzeln abzulesen, die in der Spalte n stehen.

2. Aus der Anzahl der Ziffern einer Quadratzahl kann man auf die Anzahl der Ziffern ihrer Quadratwurzel schließen. Die Tabelle auf Seite 94 gibt darüber Auskunft; vertauscht man die beiden Zeilen, so ergibt sich folgende Tabelle:

Anzahl der Ziffern einer Quadratzahl	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Anzahl der Ziffern der Quadratwurzel	1		2		3		4		...

3. Um die Anzahl der Ziffern einer Quadratwurzel festzustellen, teilt man daher die Ziffern der Quadratzahl von der Einerstelle aus in Gruppen zu zwei Ziffern; die Anzahl der Gruppen in der Quadratzahl ist gleich der Anzahl der Ziffern der Quadratwurzel dieser Zahl.

Beispiele: $\sqrt{13|69} = \overset{37}{..}$, $\sqrt{5|76} = \overset{24}{..}$, $\sqrt{28|83|69} = \overset{537}{...}$, $\sqrt{9|54|81} = \overset{309}{...}$

Wie man aus $\sqrt{576}$ bzw. $\sqrt{95\,481}$ ersieht, kann die am weitesten links stehende Gruppe auch aus bloß einer Ziffer bestehen.

4. Hat die Quadratzahl Dezimalen, so hat man die Beziehungen in Kapitel 28, 3 zu berücksichtigen, unterteilt vom Komma aus die Zahl in Gruppen zu zwei Ziffern und rechnet zunächst so wie mit natürlichen Zahlen. Zu jeder Zifferngruppe der Quadratzahl gehört eine Ziffer der Quadratwurzel; soviel Zifferngruppen die Quadratzahl rechts vom Komma hat, soviel Dezimalen hat die Quadratwurzel dieser Zahl.

Beispiele: $\sqrt{7{,}84} = 2{,}8$ $\quad\sqrt{0{,}07|84} = 0{,}28$ $\quad\sqrt{0{,}00|07|84} = 0{,}028$

c) Das Ziehen der Quadratwurzel

1. Das Berechnen der Quadratwurzel bezeichnet man als das **Ziehen** der Quadratwurzel; es kann als umgekehrter Rechenvorgang des Quadrierens aufgefaßt werden. Mit Hilfe der Formeln (28 a — c) kann man das Verfahren des Ziehens der Quadratwurzel ableiten.

2. Quadriert man eine **zweiziffrige Zahl,** z. B. 28 nach dieser Methode, so zerlegt man 28 in die Form $10 \cdot p + q$, also in $20 + 8$.

$(a + b)^2$	28^2	$= 784$
a^2	20^2	400
$(2a + b) \cdot b$	$(2 \cdot 20 + 8) \cdot 8$	384
		784

Für diesen Fall ist $a = 10 \cdot p = 10 \cdot 2$, somit $p = 2$, $b = q = 8$.

a) Um nun $\sqrt{784}$ zu berechnen, wird der umgekehrte Rechenvorgang durchgeführt; dabei wird der Reihe nach zuerst a (und damit p) und dann b (= q) berechnet. Weil die Quadratzahl dreiziffrig ist, ist die Quadratwurzel eine zweiziffrige Zahl, man schreibt also $\sqrt{7|84} = ..$

b) Berechnung der Zehnerziffer. Um die Zehnerziffer p zu ermitteln, überlegt man: Die Zehnerziffer kann nicht 3 oder größer als 3 sein, da bereits $(10 \cdot 3)^2 = 30^2 = 900$ eine Zahl ergibt, die größer als 784 ist. Wir versuchen es mit der nächstkleineren natürlichen Zahl, das ist 2:

$(10 \cdot 2)^2 = 20^2 = 400 < 784$. Es ist also $a = 20$ bzw. $p = 2$.

Wir schreiben 2 an die Zehnerstelle: $\sqrt{784} = \overset{2}{.}.$

c) Berechnung der Einerziffer. Zieht man von $(a+b)^2 = 784$ den Betrag $a^2 = 400$ ab, so verbleibt der Ausdruck $(2a+b)\cdot b = (2\cdot 20 + b)\cdot b = (40+b)\cdot b = 384$. Dividierte man 384 durch $2a + b = 40 + b$, so wäre b das Ergebnis. Nun kennt man aber b noch nicht. Um einen Anhaltspunkt für die Größe von b zu erhalten, dividiert man 384 bloß durch 40; da die Einerstelle von 384 dabei nicht maßgebend ist, hakt man sie ab, berücksichtigt sie derzeit nicht und berechnet, wie oft 40 in 380, oder einfacher, wie oft 4 in 38 enthalten ist. 4 ist in 38 9mal enthalten. Danach wäre b = 9. Setzt man b = 9 ein, so ist der Wert des Restausdrucks $(2a+b)\cdot b = (40+9)\cdot 9 = 49\cdot 9 = 441 > 384$.

$$\sqrt{7|84} = 2.$$
$$\begin{array}{r} -4\ 00 \\ \hline 3\ 84 \end{array}$$

$$\sqrt{7|84} = 28$$
$$\begin{array}{rl} -4\ 00 & \\ \hline 3\ 84 & : 48 \end{array}$$

Es ist also der Wert 9 für b zu groß; man versucht es nun mit b = 8: $(2a+b)\cdot b = (40+8)\cdot 8 = 48\cdot 8 = 384$. Man setzt die Ziffer 8 an die Einerstelle der Quadratwurzel.

3. Quadriert man eine **dreiziffrige Zahl,** z. B. 347, nach (28 b), so zerlegt man 347 in $a + b + c = 100p + 10q + r$, wobei $a = 100p = 300$, $b = 10q = 40$ und $c = r = 7$ ist.

$(a+b+c)^2$	$347^2 = 120409$			Neben-rechnungen:
a^2	300^2	9....		
$(2a+b)\cdot b$	$(2\cdot 300 + 40)\cdot 40$	256..	30409	$640\cdot 40$
$[2\cdot(a+b)+c]\cdot c$	$(2\cdot 340 + 7)\cdot 7$	4809		$687\cdot 7$
		120409		

a) Es soll nun als Umkehrung $\sqrt{120\,409}$ berechnet werden. Man unterteilt — von der Einerstelle ausgehend — die Ziffern in Gruppen zu zweit; es sind drei Gruppen, $\sqrt{12|04|09} = \ldots$, es hat daher auch die Quadratwurzel drei Ziffern; man setzt drei Punkte rechts vom Gleichheitszeichen.

b) Berechnung der Hunderterziffer. Man stellt fest: Die Ziffer an der Hunderterstelle kann nicht 4 oder größer als 4 sein, denn es ist bereits $400^2 = 160000 > 120409$. Die nächstkleinere natürliche Zahl ist 3; es ist $300^2 = 90000 < 120409$. Somit ist a = 300 bzw. p = 3. Man setzt die Ziffer 3 an die H-Stelle der Quadratwurzel: $\sqrt{12|04|09} = \overset{3}{.}\,.\,.$ Im nachhinein überlegt man: 3^2 ist das größte Quadrat, das kleiner ist als die Zahl, die die erste Zifferngruppe links angibt, hier : 12.

c) Berechnung der Zehnerziffer. Subtrahiert man von der Quadratzahl den Betrag $a^2 = 300^2 = 90000$, so verbleibt der Rest $(2a+b)\cdot b + [2\cdot(a+b)+c]\cdot c = 30409$. Zur Ermittlung von $b = 10q$ setzt man $a = 300$ in den Ausdruck $(2a+b)\cdot b$ ein, es ergibt sich: $(600+b)\cdot b = (600+10q)\cdot 10q$. Um einen Begriff von der Größe der Zahl $b = 10q$ bzw. von der Ziffer q zu gewinnen, dividiert man den Rest (= 30409) durch $2a = 600$, rechnet also 30409 : 600 oder kürzer 304 : 6 und erhält 50. Nun

$$\sqrt{12|04|09} = \overset{34}{.\,.}\,.$$
$$\begin{array}{r} -9\ 00\ 00 \\ \hline 3\ 04\ 09 \end{array}$$

setzt man $b = 10q = 50$ in den Ausdruck $(2a+b)\cdot b$ ein; es ergibt sich $(600+50)\cdot 50 = 650\cdot 50 = 32500$. Weil dieser Wert größer als der Rest (= 30409) ist, muß $b = 10q$ kleiner als 50 sein. Man versucht es daher mit $b = 10q = 40$. $(2a+b)\cdot b$ nimmt den Wert $(600+40)\cdot 40 = 640\cdot 40 = 25600$ an und ist kleiner als der Rest. Es ist also $b = 10q = 40$ und die Zehnerziffer q = 4. Man setzt 4 an die Zehnerstelle der Quadratwurzel.

d) Berechnung der Einerziffer. Subtrahiert man $(2a+b)\cdot b = (2\cdot 300 + 40)\cdot 40 = 640\cdot 40 = 25600$ vom bisherigen Rest, so verbleibt der neue Rest $[2\cdot(a+b)+c]\cdot c = 4809$. In diesem Ausdruck sind bereits a, b berechnet; es ist nur noch c zu ermitteln. Um über die Größe von c Auskunft zu erhalten, dividiert man 4809 bloß durch $2\cdot(a+b) = 2\cdot 340 = 680$ [statt durch $2\cdot(a+b)+c$] und rechnet 4809 : 680 oder kürzer 480 : 68, denn die Einerstelle 9 ist dabei nicht maßgebend, man hakt sie daher ab und beachtet sie zunächst nicht. 68 ist in 480 7mal enthalten. Man versucht, für c den Wert 7 einzusetzen; es ergibt sich: $[2\cdot(a+b)+c]\cdot c = [2\cdot 340 + 7]\cdot 7 = 687\cdot 7 = 4809$, also gerade der Wert des zweiten Restes. Es ist daher $c = r = 7$, und man schreibt 7 an die Einerstelle der Quadratwurzel.

$$\sqrt{12|04|09} = \overset{34}{.\,.}\,.$$
$$\begin{array}{rl} -9\ 00\ 00 & \\ \hline 3\ 04\ 09 & : 640 \\ -2\ 56\ 00 & \\ \hline 48\ 09 & \end{array}$$

$$\sqrt{12|04|09} = \overset{347}{.\,.\,.}$$
$$\begin{array}{rl} -9\ 00\ 00 & \\ \hline 3\ 04\ 09 & : 640 \\ -2\ 56\ 00 & \\ \hline 48\ 09 & : 687 \\ -48\ 09 & \\ \hline 00\ 00 & \end{array}$$

d) Rechentechnische Durchführung des Quadratwurzelziehens

1. Der Vorgang beim Quadratwurzelziehen, wie er hier dargelegt wurde, wird beim praktischen Rechnen stark verkürzt. Die nachfolgende Gegenüberstellung soll die Vereinfachung zeigen.

Theoretischer Rechenvorgang:

$$\sqrt{12|04|09} = 347$$
$$\begin{array}{rl} -9\ 00\ 00 & \\ \hline 3\ 04\ 09 & : (600+40)\cdot 40 \\ -2\ 56\ 00 & \\ \hline 48\ 09 & : (680+7)\cdot 7 \\ -48\ 09 & \\ \hline 00\ 00 & \end{array}$$

Praktischer Rechenvorgang:

$$\sqrt{12|04|09} = 347$$
$$\begin{array}{l} 3\ 0\underline{4} : 64\cdot 4 \\ \quad 48\ 0\underline{9} : 687\cdot 7 \\ \quad 00\ 00 \end{array}$$

Die wichtigsten Vereinfachungen sind also:

a) Bei den auszuführenden Subtraktionen werden die Subtrahenden nicht angeschrieben.

b) Die nicht für den unmittelbaren Rechenvorgang benötigten Zifferngruppen werden nicht „heruntergesetzt"; das gilt im obigen Beispiel bei der ersten Subtraktion für die dritte Zifferngruppe (09).

c) Die erforderlichen Multiplikationen und die darauf folgenden Subtraktionen werden in einem Rechenvorgang ausgeführt. Dabei werden die Nullen nicht angeschrieben: Statt 640 schreibt man 64, statt 40 schreibt man 4.

2. Es ist üblich, beim Quadratwurzelziehen etwa folgende **Sprechweise** einzuhalten:

a) **Das größte Quadrat, das kleiner als 12 ist, ist das der Zahl 3; $3 \cdot 3 = 9$, 9 und 3 ist 12** (man schreibt 3 an die Hunderterstelle)	$\sqrt{12\,\vert\,04\,\vert\,09} = 3\,\cdot\cdot$ 3
b) **Nächste Gruppe** (04) **heruntergesetzt, letzte Stelle abgehakt; dividiert durch 6** (6 ist das Doppelte des bisherigen Ergebnisses)	3 04 : 6
4 an, mal 4	3 04 : 64 · 4
c) Nun wird die Multiplikation (64 · 4) und die darauf folgende Subtraktion ausgeführt	3 04 : 64 · 4 48
d) **Nächste Gruppe** (09) **heruntergesetzt, letzte Stelle abgehakt; dividiert durch 68** (das Doppelte des bisherigen Ergebnisses)	48 09 : 68
7 an, mal 7	48 09 : 687 · 7 00 00

e) Näherungswerte für Quadratwurzeln

1. Es gibt natürliche Zahlen, die keine Quadratzahlen sind. Die Zahlen 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 sind einige Beispiele dafür. Daß z. B. $\sqrt{2}$ keine natürliche Zahl und damit 2 keine Quadratzahl ist, entnimmt man aus den Beziehungen: $1^2 = 1$, $(\sqrt{2})^2 = 2$, $2^2 = 4$; es gilt somit $1 < \sqrt{2} < 2$. Aus folgender Überlegung ergibt sich ferner, daß $\sqrt{2}$ auch nicht eine Dezimalzahl mit endlich vielen Dezimalen sein kann: Wäre $\sqrt{2}$ eine auf Zehntel ausgehende Dezimalzahl, so ergäbe ihr Quadrat bereits eine Dezimalzahl mit 2 Dezimalen und daher keine ganze Zahl. In gleicher Weise überlegt man, wenn man annimmt, daß $\sqrt{2}$ eine Dezimalzahl mit zwei oder mehr Dezimalen ist. Es gilt daher:

$\sqrt{2}$ kann keine Dezimalzahl mit endlich vielen Dezimalen sein.
Das gleiche gilt für $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ...

2. Näherungswerte für $\sqrt{2}$: Mit Hilfe der Tafeln kann man feststellen:

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, denn $(1{,}4)^2 = 1{,}96$; $(1{,}5)^2 = 2{,}25$

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, denn $(1{,}41)^2 = 1{,}9881$; $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$

Die Zahlen 1,4; 1,41 bzw. 1,5; 1,42 heißen **Näherungswerte** der Zahl $\sqrt{2}$. Durch Probieren kann man bessere Näherungswerte finden, also Werte, deren Quadrate sich um weniger von $(\sqrt{2})^2 = 2$ unterscheiden als die Quadrate der bisherigen Näherungswerte. Es gilt z. B. $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$; 1,414 und 1,415 sind zwei weitere und zwar bessere Näherungswerte als die bisherigen.

3. Die Näherungswerte, die kleiner als $\sqrt{2}$ sind, ergeben sich, wenn man das Rechenverfahren des Wurzelziehens wie für Quadratzahlen ausführt; das Verfahren geht nie zu Ende. In der nebenstehenden Rechnung ist das Verfahren bis zur 5. Dezimale ausgeführt.

$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$
100 : 24 · 4
400 : 281 · 1
11900 : 2824 · 4
60400 : 28282 · 2
383600 : 282841 · 1
.
.

Es gilt:

$$1 < 1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414 < 1{,}4142 < 1{,}41421 < \ldots < \sqrt{2}$$

4. Näherungswerte für Quadratwurzeln. Gibt man eine beliebige natürliche Zahl oder eine Dezimalzahl an und zieht aus ihr die Wurzel, so wird das Rechenverfahren im allgemeinen nie zu Ende gehen. Man begnügt sich daher mit einem Näherungswert und berechnet so viele Dezimalen der Quadratwurzel, wie es für das vorliegende Beispiel sinnvoll ist.

5. In den Potenz- und Wurzeltafeln am Schluß des Buches ist zu jeder in der Spalte n angegebenen Zahl drei Spalten weiter rechts, in der Spalte $\sqrt{n}$, ein Näherungswert mit 4 Dezimalen für $\sqrt{n}$ angegeben. Es ist z. B. $\sqrt{45} \approx 6{,}7082$.

f) Gebrauch der Tafeln der Quadratwurzeln

1. Aus den Tafeln am Schluß des Buches kann man zu jeder dort angegebenen Zahl n in der Spalte $\sqrt{n}$ die auf 4 Dezimalen gerundete Quadratwurzel dieser Zahl ablesen. Es ist z. B.

$$\sqrt{7} \approx 2{,}6458 \qquad \sqrt{73} \approx 8{,}5440 \qquad \sqrt{451} \approx 21{,}2368$$

2. Kennt man von einer Zahl die Quadratwurzel, so kann man vom 100fachen bzw. vom Hundertstel dieser Zahl ebenfalls die Quadratwurzel angeben. Hiezu sind folgende Überlegungen erforderlich:

Aus $(10n)^2 = 100n^2$ folgt

$$\sqrt{100 \cdot n^2} = 10 \cdot n$$

Die Quadratwurzel aus der 100fachen Zahl ist gleich der 10fachen Quadratwurzel dieser Zahl.

Aus $(0{,}1n)^2 = 0{,}01 \cdot n^2$ folgt

$$\sqrt{0{,}01 \cdot n^2} = 0{,}1 \cdot n$$

Die Quadratwurzel aus einem Hundertstel der Zahl ist gleich dem Zehntel der Quadratwurzel dieser Zahl.

Beispiele:

$\sqrt{7000} = \sqrt{100 \cdot 70} = 10 \cdot \sqrt{70} \approx 10 \cdot 8{,}3666 = 83{,}666$

$\sqrt{70\,000} = \sqrt{100 \cdot 700} = 10 \cdot \sqrt{700} \approx 10 \cdot 26{,}4575 = 264{,}575$

$\sqrt{700\,000} = \sqrt{100 \cdot 7000} = 10 \cdot \sqrt{7000} \approx 10 \cdot 83{,}666 = 836{,}66$

$\sqrt{0{,}7} = \sqrt{0{,}01 \cdot 70} = 0{,}1 \cdot \sqrt{70} \approx 0{,}1 \cdot 8{,}3666 = 0{,}83666$

$\sqrt{0{,}07} = \sqrt{0{,}01 \cdot 7} = 0{,}1 \cdot \sqrt{7} \approx 0{,}1 \cdot 2{,}6458 = 0{,}26458$

$\sqrt{0{,}007} = \sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}7} = 0{,}1 \cdot \sqrt{0{,}7} \approx 0{,}1 \cdot 0{,}83666 = 0{,}083666$